Autour d'une question ouverte

Le problème

On choisit deux points A et B au hasard et uniformément sur un segment de longueur 1.
Quelle est la probabilité que la longueur AB soit inférieure à 0,5 ?

Simuler pour conjecturer

Ecrire un algorithme permettant de simuler le choix de *n* couples de points A et B et d'indiquer la fréquence des couples pour lesquels la longueur AB est inférieure à 0,5.
Implanter l'algorithme sous Algobox et conjecturer le résultat.

Pour la suite, retenir une valeur f_{100} de la fréquence observée en choisissant $n = 100$ ainsi qu'une valeur f_{1000} de la fréquence observée en choisissant $n = 1000$.

Estimer la proportion *p* des couples de points A et B pour lesquels la longueur AB est inférieure à 0,5

A partir du choix de *n* couples de points A et B, on cherche à estimer la proportion *p* de ceux dont la longueur AB est inférieure à 0,5.

Supposons que cette proportion *p* soit connue.
On répète *n* fois de façon indépendante la même épreuve (choisir deux points au hasard et uniformément sur un segment de longueur 1 et s'intéresser à la longueur AB) à deux issues : la longueur AB est inférieure à 0,5 avec la probabilité *p* ou la longueur AB est strictement inférieure à *p* avec la probabilité $1 - p$.

On note *X* la variable aléatoire donnant le nombre de fois où la longueur AB est inférieure à 0,5 à l'issue de l'expérience.

Dans ce cas, un intervalle de fluctuation de la variable fréquence correspondante est donné par $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ et théoriquement si *n* est suffisamment grand, plus de 95% des échantillons fournissent une fréquence appartenant à cet intervalle.

a) A l'aide de GéoGebra, créer un curseur *n*, un curseur *p* et représenter les fonctions $x \mapsto x - \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $x \mapsto x + \frac{1}{\sqrt{n}}$

b) Pour $n = 100$ et en faisant varier *p*, déterminer les valeurs de *p* qui conduisent à un intervalle de fluctuation contenant la fréquence f_{100} observée. Exprimer alors en fonction de f_{100} les bornes de l'intervalle obtenu pour les valeurs de *p* possibles.

c) Reprendre la question précédente en choisissant $n = 1000$ et en travaillant à l'aide de la fréquence observée f_{1000}.

d) Quelle valeur de *n* peut-on prendre pour estimer, avec un niveau de confiance de 95%, la valeur de *p* à l'aide d'un encadrement d'amplitude 10^{-3} ? Simuler l'expérience sous Algobox.

Il reste tout de même à répondre au problème…

…ou à prolonger la question….

On considère deux variables aléatoires *X* et *Y* suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0 ; 1]$.

Le but de l'exercice est l'étude de la loi de la variable aléatoire *D* définie par $D = |Y - X|$

Aux deux variables aléatoires *X* et *Y*, on associe le point aléatoire M de coordonnées $(X ; Y)$ dans un repère orthonormal $(\mathrm{O} ; \mathrm{I}, \mathrm{J})$.
L'ensemble (C) formé par les points M est le carré OIKJ. Un événement *E* correspond à un ensemble (E) de points de (C).

On admet que $P(E) = \frac{\text{aire(E)}}{\text{aire(C)}}$ ce qui correspond à une loi uniforme sur l'ensemble (C).

1—Montrer que *D* prend ses valeurs dans $[0 ; 1]$.

2—a) Représenter (C) et hachurer l'ensemble (E) correspondant à l'événement $E = [\,|Y - X| \leq 0,5\,]$. En déduire $P([D \leq 0,5])$.

b) Soit *t* un nombre réel tel que $0 \leq t \leq 1$, démontrer que $P([D \leq t]) = 2t - t^2$.

3—On pose $F(t) = P([D \leq t])$ sur $[0 ; 1]$.

En admettant que *D* suit une loi de densité *f*, on a donc $F(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$ où $t \in [0 ; 1]$.

Déterminer alors l'expression de f puis vérifier que *f* est bien une densité de probabilité sur $[0 ; 1]$.