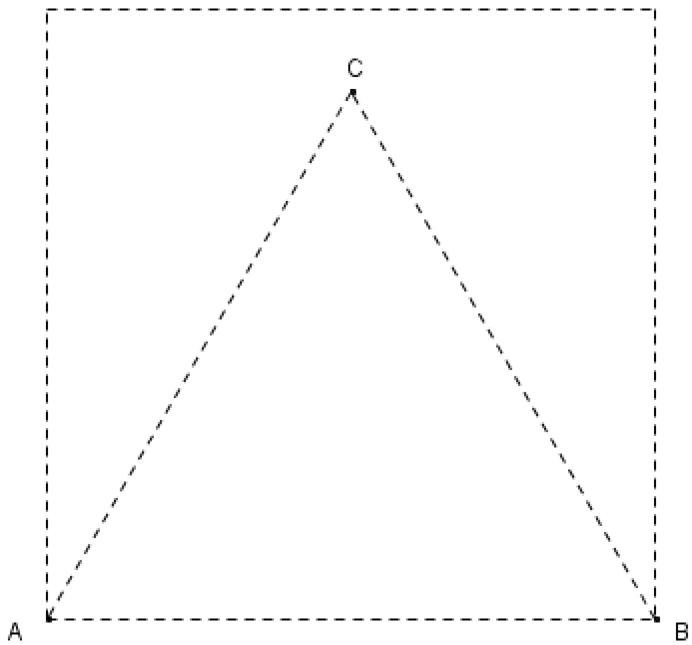
Le jeu du chaos

1—Un exemple

On considère un carré de côté 1 à l'intérieur duquel on construit un triangle équilatéral.
On place au hasard un premier point dans le carré.
On choisit au hasard, et de façon équiprobable, l'un des trois sommets du triangle équilatéral puis on construit le milieu du segment défini par le sommet choisi et le point déjà placé. On a ainsi construit un deuxième point.
Puis, on recommence en choisissant l'un des trois sommets du triangle et en construisant le milieu du segment défini par le sommet choisi et le dernier point construit.



Ecrire un algorithme permettant de placer un nombre N de points par la méthode décrite ci-dessus et l'implanter sous Algobox.

2—Le principe du jeu du chaos

Comme on l'a constaté sur ce premier exemple, une forme fractale peut être la limite d'un processus aléatoire. C'est ce que l'on appelle « le jeu du chaos ». On se donne un point initial dans le plan. On lui applique une des transformations (translations, symétrie, agrandissement ou réduction, etc) caractérisant la forme fractale en la choisissant au hasard. Puis on recommence avec le nouveau point créé et ainsi de suite.

On peut travailler en géométrie repérée. Chaque point et chaque transformation est alors donné analytiquement.

Ainsi, pour construire le triangle de Sierpinski, on se place à partir d'un triangle *ABC* tel que $A(0,0)$, $B(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ et $C(1,0)$.

On choisit un point $M(x,y)$ puis, au dernier point construit, on applique l'une des transformations définies par $f_1(x\,,y)=\left(\frac{x}{2}\,,\,\frac{y}{2}\right)$, $f_2(x\,,y)=\left(\frac{1}{2}(x+1)\,,\,\frac{y}{2}\right)$ et $f_3(x\,,y)=\left(\frac{1}{2}(x+0,5)\,,\,\frac{1}{2}(y+\frac{\sqrt{3}}{2})\right)$ choisies avec les probabilités $p_1=\frac{1}{3}$, $p_2=\frac{1}{3}$ et $p_3=\frac{1}{3}$. Ces transformations correspondent à des réductions de rapport $\frac{1}{2}$ en choisissant comme centre de la réduction, l'un des sommets du triangle initial.

Ce jeu produit ne produit pas un ensemble de points aléatoires mais une forme qui se dessine avec une précision d'autant plus grande que le jeu se prolonge. Dans cette technique, le hasard n'intervient que comme un outil. Les résultats sont déterministes et prévisibles.

« C'est comme quand on pénètre dans une nouvelle pièce : notre regard se promène d'une manière que nous pourrions aussi bien prendre pour du hasard, et nous nous faisons une bonne idée de la pièce. La pièce est la pièce. Elle existe indépendamment de ce que je peux faire. » (*James Gleick – La théorie du chaos*)

Lors de la prochaine séance, nous construirons ainsi quelques fractales en suivant le principe du jeu du chaos.

Les coups de pouce

1—Pour la construction à la main

- Ecrire un algorithme permettant de permettant de choisir au hasard et de façon équiprobable, l'un des trois sommets A, B ou C.

- Utiliser la calculatrice, un tableur ou Algobox pour choisir au hasard et de façon équiprobable, l'un des trois sommets A, B ou C.

2—Pour écrire l'algorithme de construction de N points

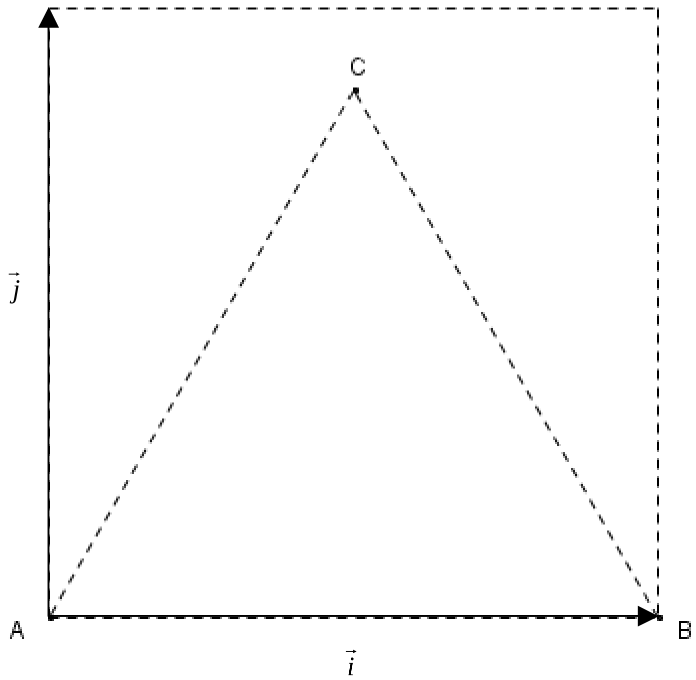
On travaille en géométrie repérée en se plaçant dans le repère $(\mathrm{A};\vec{i},\vec{j})$.

- Quelles sont les coordonnées des points A, B et C ?

- En notant (x,y) les coordonnées d'un point M, quelles sont les coordonnées (x',y') du point M' tel que M' soit le milieu du segment [AM] ?

- En notant (x,y) les coordonnées d'un point M, quelles sont les coordonnées (x',y') du point M' tel que M' soit le milieu du segment [BM] ?

- En notant (x,y) les coordonnées d'un point M, quelles sont les coordonnées (x',y') du point M' tel que M' soit le milieu du segment [CM] ?



3—Traduction des instructions selon le langage utilisé pour l'implantation

Algorithme	Traduction pour l'implantation sous Algobox	Traduction pour l'implantation sur tableur	Traduction pour l'implantation sur calculatrice