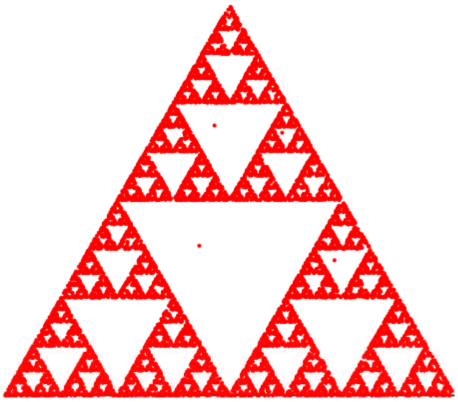
LE JEU DU CHAOS : commentaires

1—Un exemple



```
VARIABLES
  X EST_DU_TYPE NOMBRE
  Y EST_DU_TYPE NOMBRE
  D EST_DU_TYPE NOMBRE
  I EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE N
  X PREND_LA_VALEUR random()
  Y PREND_LA_VALEUR random()
  TRACER_POINT (X,Y)
  POUR I ALLANT_DE 1 A N-1
    DEBUT_POUR
    D PREND_LA_VALEUR floor(3*random())
    SI (D==0) ALORS
      DEBUT_SI
      X PREND_LA_VALEUR X/2
      Y PREND_LA_VALEUR Y/2
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        SI (D==1) ALORS
          DEBUT_SI
          X PREND_LA_VALEUR (X+0.5)/2
          Y PREND_LA_VALEUR (Y+sqrt(3)/2)/2
          FIN_SI
          SINON
            DEBUT_SINON
            X PREND_LA_VALEUR (X+1)/2
            Y PREND_LA_VALEUR Y/2
            FIN_SINON
        FIN_SINON
    TRACER_POINT (X,Y)
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

2—Le principe du jeu du chaos — Autour des IFS

En synthèse d'images, la modélisation géométrique d'objets complexes est un problème difficile. Les fractales sont très utilisées pour modéliser la nature : plantes, nuages, paysage.
On peut modéliser l'objet que l'on souhaite construire comme l'attracteur d'un ensemble de transformations, chacune de ces transformations ayant une probabilité.
Cet ensemble de transformations T_i et de probabilité p_i est appelé IFS (Iterated Function System).
On choisit un point M_0 dans le plan puis on construit une suite de points M_1, M_2, … , M_n tels que $M_{k+1} = T_i(M_k)$ où la transformation ayant été choisie au hasard parmi les transformations de l'IFS avec la probabilité correspondante. p_i.
En géométrie repérée, les transformations T_i sont données sous la forme d'applications $(x, y) \mapsto f_i(x, y)$.
En terminale, en approfondissement lors de l'accompagnement personnalisé, il est possible de déterminer l'écriture complexe de ces transformations avant de déterminer leur expression analytique. Il est par ailleurs possible prolonger en donnant leur écriture à l'aide de matrices pour les élèves suivant l'enseignement de spécialité.

On a en effet $f_i(x, y) = (ax + by + c, dx + ey + f) = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$ et on peut présenter certaines images fractales comme « point fixe » d'un système de telles applications affines contractantes.

On peut par exemple rappeler à cet effet que :

- l'écriture matricielle de l'homothétie de rapport k et de centre l'origine est $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
- l'écriture complexe de la rotation d'angle θ et de centre l'origine est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Exemple :

On construit le triangle de Sierpinski à partir d'un triangle ABC comme l'attracteur du système de fonctions itérées constitué de 3 homothéties choisies de façon équiprobable. Ces homothéties ont pour rapport 1/2 et pour centre chacun des sommets du triangle ABC. En passant à la géométrie repérée, on choisit A(0,0), B $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et C(1,0) et l'IFS peut donc être défini de la façon suivante : $f_1(x\,;y) = \left(\frac{x}{2}\,;\,\frac{y}{2}\right)$ avec la probabilité $p_1 = \frac{1}{3}$, $f_2(x\,;y) = \left(\frac{1}{2}(x+0,5)\,;\,\frac{1}{2}(y+\frac{\sqrt{3}}{2})\right)$ avec la probabilité $p_2 = \frac{1}{3}$ et $f_3(x\,;y) = \left(\frac{1}{2}(x+1)\,;\,\frac{y}{2}\right)$ avec la probabilité $p_3 = \frac{1}{3}$.