Prolongements pour l'enseignant

Les notions de test d'hypothèse et de calcul de risque ne sont pas au programme de terminale. Cependant, il peut être intéressant pour l'enseignant de se poser un instant sur ces notions de façon à éviter toute confusion, notamment dans le vocabulaire à donner aux élèves.

La production attendue est de $p = 0,8$. Pour se prononcer sur la conformité de la production, on souhaite donc tester l'hypothèse $p = 0,8$ (hypothèse que l'on notera H_0) à partir d'un échantillon.

La fréquence observée dans l'échantillon est de $f_{obs} = \dfrac{110}{150} \approx 0,733$.

1er cas : Cas où on décide de rejeter l'hypothèse H_0

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est $I_{150} = [\,0,736\,;0,864\,]$ (ou, en arrondissant par défaut et par excès, $I_{150} = [\,0,735\,;0,865\,]$). Comme $f_{obs} \notin I_{150}$, on décide, au seuil de 95%, de rejeter l'hypothèse de conformité de l'échantillon avec la production attendue.

Quelle est l'erreur commise dans ce cas ?

Pour répondre à cette question, on calcule la probabilité d'avoir rejeté à tort l'hypothèse de conformité de l'échantillon autrement dit, on détermine la probabilité d'avoir rejeté l'hypothèse H_0 alors qu'elle était vraie.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de pâtes de fruit de première espèce dans l'échantillon. L'hypothèse H_0 étant vraie ie la production étant conforme, la proportion de pâtes de fruit de premier choix est donc $p = 0,8$. La production peut être considérée suffisamment importante pour que X suive donc une loi binomiale de paramètre $n = 150$ et $p = 0,8$.
La probabilité d'avoir rejeté à tort l'hypothèse de conformité est donc

$$P([F \notin I_{150}]) = P([\frac{X}{150} \notin I_{150}]) = 1 - P([\frac{X}{150} \in I_{150}]) = 1 - 0,95 = 0,05$$

Le risque d'erreur est donc dans ce cas de 5%.

Plus généralement, en travaillant à l'aide d'un intervalle de fluctuation au seuil $1-\alpha$,on peut retenir que **la probabilité de rejeter à tort une hypothèse** H_0 , est $P([F \notin I_n]) = P([\frac{X}{n} \notin I_n]) = 1 - P([\frac{X}{n} \in I_n]) = 1 - (1-\alpha) = \alpha$
Le risque d'erreur est alors de α . C'est ce que l'on appelle le **risque de première espèce**.

2ème cas : Cas où on décide de ne pas rejeter l'hypothèse H_0

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 98% est $I_{150} = [\,0,724\,;0,876\,]$. Comme $f_{obs} \in I_{150}$, on décide, au seuil de 98%, de ne pas rejeter l'hypothèse de conformité de l'échantillon avec la production attendue autrement dit, on décide d'accepter l'hypothèse de conformité.

Quelle est l'erreur commise dans ce cas ?

On est amené à calculer la probabilité d'avoir accepté à tort l'hypothèse de conformité de l'échantillon autrement dit, on détermine la probabilité d'avoir accepté l'hypothèse H_0 alors qu'elle était fausse.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de pâtes de fruit de première espèce dans l'échantillon. L'hypothèse H_0 étant fausse ie la production n'étant pas conforme, on est amené à émettre une nouvelle hypothèse (que l'on notera H_1) concernant la proportion de pâtes de fruit de premier choix. Dans l'énoncé, on choisit comme nouvelle hypothèse $p_1 = 0,7$. La production peut être considérée suffisamment importante de sorte que X suive donc une loi binomiale de paramètre $n = 150$ et $p_1 = 0,7$.
La probabilité d'avoir accepter à tort l'hypothèse H_0 , c'est à dire d'avoir accepter l'hypothèse H_0 alors que H_1 est vraie est donc

$$P([F \in I_{150}]) = P([0,724 \le \frac{X}{150} \le 0,876]) = P([0,724 \times 150 \le X \le 0,876 \times 150])$$

$= P([108,6 \le X \le 131,4]) = P([X \le 131]) - P([X \le 108]) \approx 0,269$ à l'aide de la calculatrice.
Le risque d'erreur est donc dans ce cas d'environ 26,9%. On note généralement β ce risque de deuxième espèce.

Plus généralement, on peut retenir que pour déterminer **la probabilité d'accepter à tort une hypothèse** H_0 , il est nécessaire d'émettre une nouvelle hypothèse H_1 . Le risque d'erreur dépend de l'hypothèse H_1 considérée. Ce risque est appelé **risque de**

deuxième espèce et est noté β. Il est évidemment beaucoup plus difficile à déterminer que le risque de première espèce puisque l'on ne connaît pas l'hypothèse H_1 nécessaire à son calcul.

En conclusion :

* on évitera de parler de « risque » et on préférera dire que l'on rejette (ou que l'on accepte de ne pas rejeter) une hypothèse au seuil de 95% (ou 98% ou…), le risque n'étant connu que dans le cas où on rejette une hypothèse H_0.

* on pourra retenir qu'un test n'est pas significatif quand on accepte une hypothèse H_0 car on n'a aucune idée du risque d'erreur associé à cette décision. En revanche, un test sera significatif lorsque l'on rejette l'hypothèse H_0 car on connaît la probabilité de se tromper (égale à α si on travaille au seuil $1-\alpha$; et, bien souvent même inférieure à α si la fréquence observée est loin des valeurs de seuil).

* on peut visualiser le problème sous GeoGebra à l'aide du fichier Fn_risques.ggb.
On peut observer l'incidence du choix de l'hypothèse H_1 sur le risque de deuxième espèce ou encore constater que, une hypothèse H_1 étant choisie, on peut augmenter la puissance du test (par définition, égale à $1-\beta$) et donc diminuer le risque, en augmentant la taille de l'échantillon sur lequel on travaille (en supposant que la fréquence observée reste inchangée).