Exercice académique n°1 - Décomposons un carré

1) Premiers exemples

a) $3^2 = 9 = 1 \times 9 = 3 \times 3$ donc on a : (1;9) et (3;3) $n= 2$ et $d = 3$

b) On peut prendre $a = 8$ car $8^2 = 64 = 1 \times 64 = 2 \times 32 = 4 \times 16 = 8 \times 8$ donc $n= 4$ et $d = 7$.

c) non car $a^2 = 1 \times a^2 = a \times a$ or a > 1 donc on obtient au moins deux couples distincts. D'où $n>1$.

2) Cas particuliers

a) $a^2 = 1 \times p^2 = p \times p$ et aucune autre décomposition n'est possible. $n = 2$ et $d = 3$.

b) $a = p \times q$ donc $a^2 = p^2 \times q^2$.

On dénombre alors 5 couples $(b ; c)$ ainsi : $a^2 = 1 \times p^2q^2 = p \times pq^2 = q \times p^2q = pq \times pq = p^2 \times q^2$

c) $a = p^2$ donc $a^2 = p^4$.

On dénombre alors 3 couples $(b ; c)$ ainsi : $a^2 = 1 \times p^4 = p \times p^3 = p^2 \times p^2$.

d) *2021* a pour décomposition en facteurs premiers $2021 = 43 \times 47$; il y a donc *5* couples solution :

$2021^2 = 1 \times 4084441 = 43 \times 94987 = 47 \times 86903 = 1849 \times 2209 = 2021 \times 2021$

3) Retour au cas général :

a) Une personne affirme qu'elle a trouvé un entier a pour lequel $d=10$.

$a^2 = 1 \times a^2 = \dots = a \times a$ donc le « dernier » couple est composé de deux nombres identiques. Le nombre de diviseurs est donc forcément un nombre impair. $d=10$ est donc impossible.

Le nombre de diviseurs est $d=2n-1$

b) Pour tout entier $a \geq 2$, on a déjà vu (question *1c)* que $n > 1$

De plus, $a^2 = 1 \times a^2 = \dots\dots\dots = a \times a$; b diviseur de a est un entier tel que $1 \leq b \leq a$; or, il y a a entiers entre 1 et a donc $n \leq a$; alors $2 \leq n \leq a$.

4) $a = 1000000 = 10^6 = (2 \times 5)^6 = 2^6 \times 5^6$ donc $a^2 = 10^{12} = 2^{12} \times 5^{12}$

A l'aide d'un arbre, on montre alors que a^2 admet $13 \times 13 = 169$ diviseurs.

On a donc $d = 169$; or $d = 2n - 1$ donc $n = (d + 1)/2 = (169 + 1)/2 = 85$ nombres de couples solutions.

5) On note a le côté du carré, a^2 est donc son aire. Les décompositions en couples $(b;c)$ avec $b \leq c$ correspondent à des dimensions de rectangles (b est la largeur et c la longueur) avec des aires toutes égales à a^2.

La question revient donc à : étant donné que $n = 10$, déterminer a tel que $a^2 < 1000000$.

On a vu au 2. a) que si $a=p^k$ avec $k=2$ et p premier, alors $n=3$ donc $n=k+1$.

En étudiant le cas $a=p^k$ avec p premier, pour quelques entiers k supérieurs à 3, on trouve aussi $n=k+1$.

On conjecture donc que si cas $a=p^k$ avec p premier et k entier alors $n=k+1$.

D'où l'idée de prendre $k=9$ et voir si le nombre $a=2^9$ convient.

C'est bien le cas car ainsi $a^2 < 1000000$ et $n=10$.

Exercice académique n°2 – Karena le lama

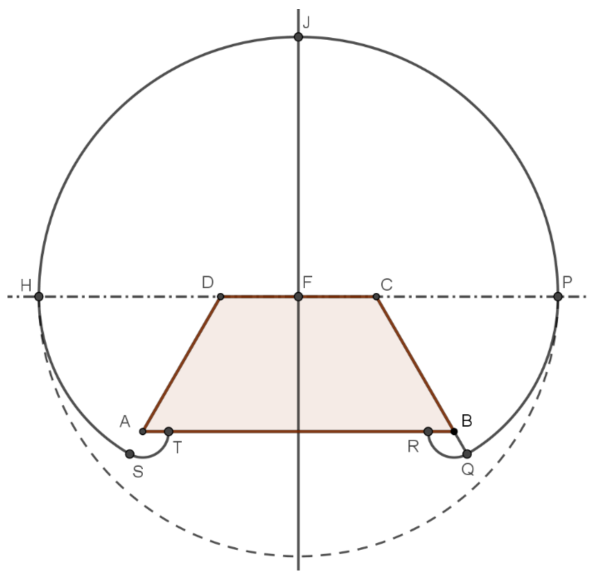
1) Soit G le milieu de [AB]. On a AG = GB = 6.
Le quadrilatère CDAG qui a deux côtés parallèles et de même longueur est un parallélogramme ; on en déduit que CG = 6 et donc BCG est équilatéral.
De la même façon on démontrerait que ADG et CDG sont aussi équilatéraux.
On peut conclure que dans le trapèze ABCD les angles en A et en B valent chacun 60° et les angles en C et en D valent chacun 120°.

2) L'aire de la région que le lama Karena peut parcourir est égale à $0{,}5\pi \times 2^2$ soit en valeur exacte 2π m² soit 6,28 m² à 0,01 près.

3. a) S'il est attaché au point C l'aire de la région atteinte par le lama vaut 2/3 du disque de rayon 6 m, soit $\frac{2}{3}\pi 6^2$ soit 24 π m² soit 75,40 m² à 0,01 près.
3) b) S'il est attaché au point B l'aire de la région atteinte par le lama vaut 5/6 du disque de rayon 6 m, soit $\frac{5}{6}\pi 6^2$ soit 30 π m² soit 94,25 m² à 0,01 près.

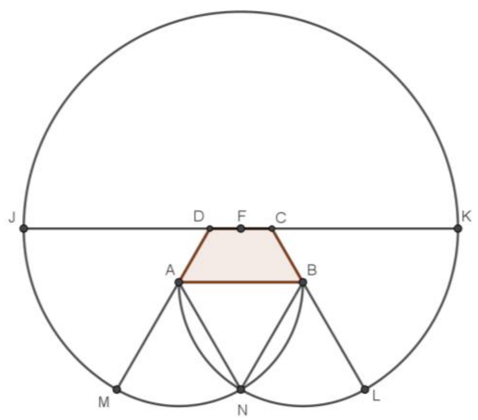
4. a) Pour dessiner la région atteinte par le lama il ne suffit pas de tracer un arc de cercle de centre F et de rayon 10 m car, par exemple, quand la chaîne est tendue dans le prolongement du segment [CD] et que le lama se déplace vers le « bas » de la feuille sa chaîne ne va plus pivoter autour du point F mais dans un premier temps autour du point C ou du point D.

4. b)



4. c) La région que le lama Karena peut parcourir est constituée de :
- Le demi-disque PCDHJ de centre F, milieu de [CD], et de rayon 10 m.
Son aire vaut $0{,}5\pi \times 10^2 = 50\pi$.
- Les secteurs angulaires identiques PCQ et HDS de centres respectifs C et D de rayon 7 m et d'angle au centre de 60°.
Leur aire vaut $2 \times \frac{1}{6}\pi \times 7^2 = \frac{1}{3}49\pi$.
- Les secteurs angulaires identiques BQR et AST de centres respectifs B et A de rayon 1 m et d'angle au centre de 120°.
Leur aire vaut $2 \times \frac{1}{3}\pi \times 1^2 = \frac{2}{3}\pi$.
L'aire totale vaut donc : $50\pi + \frac{1}{3}49\pi + \frac{2}{3}\pi = 67\pi$ m² soit 210,49 m² à 0,01 près.

5)a) La chaîne mesure 21 m donc, à partir du point F, elle atteint le point A en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre et elle atteint le point B en tournant dans l'autre sens.
La zone commune est le triangle curviligne composé du segment [AB] et des deux arcs de rayon égal à 12 m l'un centré en A et l'autre centré en B.



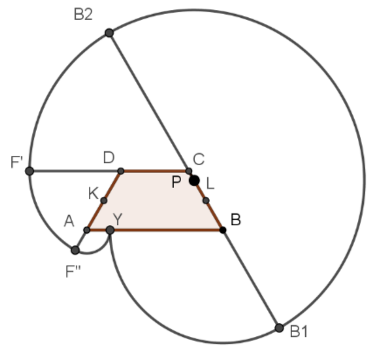
5)b) L'aire de la zone balayée par Karena le lama est la somme de :

- l'aire du demi-disque de centre E et de rayon 21 m, c'est-à-dire $\frac{21^2}{2}\pi$ m² ;
- $\frac{2}{6}$ de l'aire d'un disque de rayon 18 m, c'est-à-dire $\frac{18^2}{3}\pi$ m² ;
- $\frac{2}{6}$ de l'aire d'un disque de rayon 12 m, c'est-à-dire $\frac{12^2}{3}\pi$ m² ;
- de l'aire d'un triangle équilatéral de côté 2 cm, c'est-à-dire $36\sqrt{3}$ m².

Cela donne $\left(\frac{21^2}{2}+\frac{18^2}{3}+\frac{12^2}{3}\right)\pi+36\sqrt{3}$ m² c'est-à-dire $\frac{753}{2}\pi+36\sqrt{3}$ m² soit 1245,16 m² à 0,01 près

6. On a ici CP = x avec P $\in$ [CI] donc $0 \le x \le 3$

Karena se déplace dans un sens (« au dessus de [DC] ») ou dans l'autre… Voir figure ci-dessous.



Aire du secteur B_2PB_1est $\dfrac{1}{2}\pi \times 15^2$

P est sur [LC], Y , au bout de la chaîne est sur [AB] (par les 2 parcours)

Aire du secteur CB2F' de centre C, de rayon 15-x et d'angle 60° : $\frac{1}{6}\pi(15-x)^2$.

Aire du secteur DF'F'' de centre D, de rayon 9-x et d'angle 60° : $\frac{1}{6}\pi(9-x)^2$.

Aire du secteur AF''Y de centre A, de rayon $3-x$ et d'angle 120° : $\frac{1}{3}\pi(3-x)^2$.

Aire du secteur BB1Y de centre B, de rayon 15 – (6-x) = 9 +x d'angle 120° EST $\frac{1}{3}\pi(9+x)^2$.

L'aire totale est de $\frac{1}{2}\pi 15^2+\frac{1}{6}\pi(9-x)^2+\frac{1}{3}\pi(3-x)^2+\frac{1}{6}\pi(15-x)^2\ \frac{1}{3}\pi(9+x)^2$

On factorise par $\frac{\pi}{6}$, facteur qui n'influe pas sur le résultat, on peut donc l'ignorer.

On cherche donc le minimum de : $P(x)=3\times 15^2+(9-x)^2+2(3-x)^2+(15-x)^2+2(9+x)^2$

En développant on obtient : $P(x)=6x^2-24x+1161$, polynôme du second degré, avec a= 6>0 .

Le minimum de cette fonction est obtenu pour $x=\dfrac{-(-24)}{2\times 6}=2$

La position de P sur le segment [BC] qui restreint le lama Karena à une région d'aire minimale est à 2 m du point C.

Exercice académique n°3 - Souricière

1. Chemins

a. Le chemin DD aboutit en I_1 et le chemin DGD aboutit en I_4.

b. Le chemin qui aboutit à la sortie F est DGGD.

c. Nous avons vu à la question **1.a.** que le chemin DGD aboutit en I_4. Mimie ne peut pas tourner à gauche ensuite. Emmanuelle s'est donc trompée.

2. Probabilités

a. Deux choix équiprobables ont une probabilité chacun de $\frac{1}{2}$. Pour arriver en I_1, Mimie a fait 2 choix successifs de probabilité $\frac{1}{2}$, donc la probabilité pour arriver en I_1 est $P(I_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

b. Mimie atteint F après avoir effectué 4 choix de même probabilité $\frac{1}{2}$ donc $P(F) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$.

c.

Issue	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	F	Total
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

3. Score avant apprentissage

a.

Issue	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	F
Score obtenu	1	0	0	2	3	4

b.

Score	0	1	2	3	4
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

c. Le score moyen de Mimie est $0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{16} + 4 \times \frac{1}{16} = \frac{4}{16} + \frac{4}{16} + \frac{3}{16} + \frac{4}{16} = \frac{15}{16}$ (<1)

4. Score après apprentissage

Score	0	1	2	3	4
Issue (s) correspondante(s)	I_2, I_3	I_1	I_4	I_5	F
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{16}{81}$

Le score moyen de Mimie est : $0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{4}{27} + 3 \times \frac{8}{81} + 4 \times \frac{16}{81} = \frac{18}{81} + \frac{24}{81} + \frac{24}{81} + \frac{64}{81} = \frac{130}{81} \approx 1{,}60)$

5. Réussite de l'apprentissage

a.

Score	0	1	2	3	4
Issue (s) correspondante(s)	I_2, I_3	I_1	I_4	I_5	F
Probabilité	$(1-x)$	$x(1-x)$	$x^2(1-x)$	$x^3(1-x)$	x^4

Le score moyen est donc : $0 \times (1-x) + 1 \times x(1-x) + 2 \times x^2(1-x) + 3 \times x^3(1-x) + 4x^4$
c'est-à-dire $(1-x)(x + 2x^2 + 3x^3) + 4x^4 = x + x^2 + x^3 + x^4$

b. A l'aide de la calculatrice on trouve que :

- pour $0 < x < 0{,}89$ on a : $x + x^2 + x^3 + x^4 < 3$
- pour $0{,}89 \leq x \leq 1$ on a : $x + x^2 + x^3 + x^4 > 3$

La valeur attendue est donc $x = 0{,}89$.