MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades académiques de mathématiques 2021

Académie de Rennes

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La seconde partie est constituée des exercices académiques et résolue en équipes de 2 ou 3 candidats : **une seule copie par équipe**, portant les noms de tous les membres de l'équipe, est remise à la fin de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Seconde Partie

Exercices académiques
Epreuve par équipes de 2 ou 3 candidats

La seconde partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les équipes de candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.

Les autres équipes de candidats doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

Exercice 1 (pour tous les candidats)

Décomposons un carré

Considérons un entier $a \geq 2$.

Le but de l'exercice est de déterminer des couples d'entiers strictement positifs $(b\ ;\ c)$ tels que $a^2 = b \times c$ avec $b \leq c$. De tels couples $(b\ ;\ c)$ seront appelés couples solutions associés à a.

On note d le nombre de diviseurs positifs de a^2 et n le nombre de couples solutions associés à a.

Exemple
Considérons $a = 6$.
On a : $6^2 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$.
Il y a ici 5 couples possibles $(1\ ;36)$, $(2\ ;\ 18)$, $(3\ ;\ 12)$, $(4\ ;\ 9)$, $(6\ ;\ 6)$ donc $n = 5$ et on a $d = 9$.

1. Étude préliminaire
a. Déterminer les couples solutions associés à $a = 3$; donner les valeurs de n et d correspondantes.
b. Proposer un entier a pour lequel $d = 7$; donner la valeur de n correspondante.
c. Peut-on avoir $n = 1$?

2. Étude de quelques cas particuliers
a. Considérons un nombre premier a, c'est-à-dire un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs. (Ces deux diviseurs sont 1 et lui-même).
Déterminer les couples solutions associés à a ; donner les valeurs de n et d correspondantes.
b. Considérons un entier naturel a dont la décomposition en facteurs premiers est $a = p \times q$ avec p et q premiers et $p < q$.
Donner les couples solutions associés à a ; donner les valeurs de n et d correspondantes.
c. Considérons un entier naturel a dont la décomposition en facteurs premier est $a = p^2$ avec p premier.
Donner les couples solutions associés à a ; donner les valeurs de n et d correspondantes.
d. Application : déterminer les couples solutions associés à $a = 2021$.

3. Retour au cas général
a. Une personne affirme qu'elle a trouvé un entier a pour lequel $d = 10$.
En établissant une relation entre d et n, justifier qu'elle a forcément commis une erreur.
b. Montrer que : $2 \leq n \leq a$.

4. Déterminer n lorsque $a = 1\ 000\ 000$.

5. Est-il possible de trouver exactement 10 rectangles (dont un est un carré) de même surface, inférieure ou égale à 1 m^2, et dont les longueurs des côtés sont des nombres entiers de millimètres. Justifier la réponse.

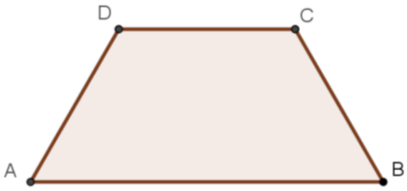
Exercice 2 (pour les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Karena le lama

Karena est un lama à l'esprit fugueur qu'il faut attacher de temps en temps pour qu'il puisse brouter sa prairie. Aujourd'hui, Karena est attaché par une chaîne à un point sur le mur extérieur de la grange.
Karena est astucieux car il sait qu'il lui est possible de se rendre à n'importe quel endroit à l'intérieur de la zone délimitée par sa chaîne lorsqu'elle est complètement étendue mais, bien sûr, il ne peut pas entrer dans la grange.

La grange a la forme d'un trapèze représenté ci-contre en vue de dessus et dont les dimensions sont données en mètres :

$$AB = 12 \qquad BC = CD = AD = 6.$$

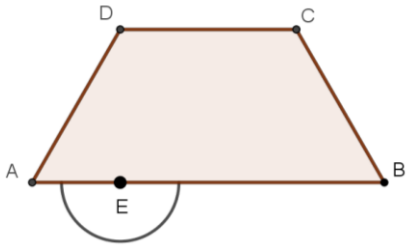


1. Déterminer la mesure de chacun des angles intérieurs du trapèze. (Par exemple, l'angle $\widehat{BAD}$ est un des angles intérieurs du trapèze.)

Dans l'exercice, les aires seront données en valeur exacte puis en valeur approchée à 0,01 près en m^2.

2. Dans ce premier exemple, la chaîne du lama mesure 2 mètres et est fixée au mur [AB] au point E situé à 3 mètres du point A ; la situation est représentée sur la figure ci-contre.

Quelle est l'aire de la zone que le lama Karena peut parcourir ?



3. La chaîne du lama mesure désormais 6 mètres.
   a. Quelle est l'aire de la zone que le lama Karena peut parcourir s'il est attaché au point C ?
   b. Quelle est l'aire de la zone que le lama Karena peut parcourir s'il est attaché au point B ?

4. La chaîne du lama mesure maintenant 10 mètres et elle est attachée au point F, milieu de [CD].
   a. Pour dessiner la région atteinte par le lama, pourquoi ne suffit-il pas de tracer un arc de cercle de centre F et de rayon 10 m ?
   b. Représenter sur la figure donnée en annexe 1 le contour de la zone parcourue par Karena.
   c. Quelle est l'aire de la zone que le lama Karena peut parcourir ?

5. La chaîne du lama est toujours attachée en F, milieu de [CD], et mesure désormais 21 mètres.
   a. Représenter, sur la figure donnée en annexe 2, le contour de la zone parcourue par Karena.
   b. Quelle est l'aire de la zone que le lama Karena peut parcourir ?
   Aide : la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a est $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

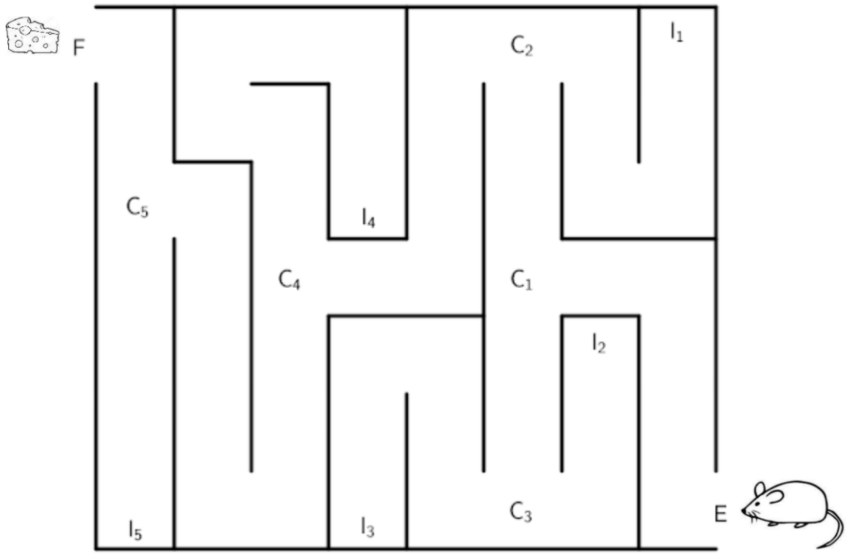
6. Soit L le milieu du segment [BC].
Si la chaîne est attachée à un point P sur le mur entre L et C et qu'elle a une longueur de 15 mètres, déterminer la position de P qui restreint le lama Karena à une zone d'aire minimale.

Pour cette question, on pourra poser $x = \mathrm{CP}$ et on réalisera sur la copie, même « à main levée », les dessins nécessaires à la compréhension.

Exercice 3 (pour les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Souricière

Dans un laboratoire, la chercheuse Emmanuelle étudie l'apprentissage à partir d'une expérience avec la souris Mimie qui se déplace dans le labyrinthe ci-dessous.



Elle place Mimie à l'entrée E du labyrinthe et Mimie doit trouver la sortie F où se trouve un fromage.

Aux endroits désignés par C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5 Mimie a le choix de tourner à gauche ou à droite.

A chaque tentative, Mimie suit un chemin qui part de E et qui aboutit soit au fromage F, soit à l'une des impasses désignées par I_1, I_2, I_3, I_4 et I_5.

Lors de sa première tentative, elle tourne à gauche en C_1 puis à droite en C_3 pour aboutir à l'impasse I_3. Ce chemin est noté GD pour : Mimie a tourné à Gauche (en C_1) puis à Droite (en C_3).

1. Chemins

a. Où aboutit le chemin DD ? Et le chemin DGD ? (*Aucune justification n'est demandée.*)

b. Donner le chemin qui aboutit à la sortie F.

c. Dans un document Emmanuelle fait référence au chemin DGDG. Qu'en pensez-vous ?

2. Probabilités

Avant apprentissage, Mimie choisit indifféremment la voie de gauche ou la voie de droite. (Les deux choix sont équiprobables.)

a. Expliquer pourquoi la probabilité que Mimie aboutisse à l'impasse I_1, est $P(I_1) = 0{,}25$.

b. Déterminer $P(F)$, la probabilité que Mimie atteigne le fromage en F.

c. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. (*Aucune justification n'est demandée ; les probabilités seront écrites sous forme de fraction irréductible.*)

Issue	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	F	Total
Probabilité	$\frac{1}{4}$						

Afin de mesurer la performance de Mimie, Emmanuelle attribue un score à l'issue de chaque tentative.
A chaque fois que Mimie fait le bon choix (celui qui la dirige vers le fromage), elle gagne un point.
Une fois qu'un mauvais choix a été fait, Mimie ne gagne plus de point.

Par exemple, pour le chemin DGD le score est de 2 points et Mimie a abouti en I_4.

3. Score avant apprentissage

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. (*Aucune justification n'est demandée.*)

Issue	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	F
Score obtenu				2		

b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. (*Aucune justification n'est demandée.*)

Score	0	1	2	3	4
Probabilité					

c. Le score moyen de Mimie est défini comme la somme des cinq produits : score × probabilité de ce score.
Le score moyen de Mimie avant apprentissage est-il plus grand ou plus petit que 1 ?

4. Score après apprentissage

A l'issue d'une période d'apprentissage, la probabilité que Mimie choisisse la bonne direction est égale à $\frac{2}{3}$ pour chaque choix de direction. Quel est, dans ce cas, son score moyen ?
(*On justifiera les calculs qui aboutissent à la valeur exacte du score moyen puis on en donnera une valeur approchée à 0,01 près.*)

5. Réussite de l'apprentissage

Emmanuelle considère que Mimie aura réussi son apprentissage lorsque son score moyen dépassera 3.
On appelle x la probabilité que Mimie choisisse la bonne direction pour chaque choix dans ce cas.
Emmanuelle cherche à déterminer la plus petite valeur à deux chiffres après la virgule que peut prendre x.

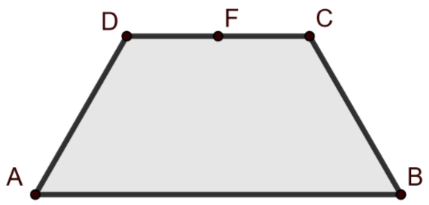
a. Exprimer le score moyen en fonction de x.

b. Répondre au problème posé.

Feuille annexe 1 à compléter et joindre à la copie pour l'exercice 2

Question 4. b.

La figure ci-dessous est à l'échelle 1 : 250



Feuille annexe 2 à compléter et joindre à la copie pour l'exercice 2

Question 5. a.

La figure ci-dessous est à l'échelle 1 : 250.