MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Olympiades académiques de mathématiques 2020

Académie de Rennes

Mercredi 11 mars 2020

Exercices académiques

Éléments de correction

Exercice académique n°1 - Opération Gamma

1)
a) on obtient quatre valeurs possibles, soit $y = 0{,}0625$, soit $y = -0{,}5$, soit $y = 4$, soit $y = -5$.
b) 1er résultat 1/36 ; <u>2e résultat 5/36</u> ; 3e résultat 5/36 ; 4e résultat 25/36 d'où une probabilité de 5/36.
c) Le 4e résultat -5 avec une proba de 25/36.

2)
a) Il s'agit de x^4 ; $2x^2 - 1$; $(2x-1)^2$ et $4x - 3$.
b) Sur l'arbre (par exemple) deux des quatre résultats sont obtenus en élevant un nombre au carré : x^4 et $(2x-1)^2$.
c) On se base sur les deux résultats susceptibles d'être négatifs.
On recherche les x pour lesquels les deux résultats qui peuvent être négatifs le sont.
Donc on veut $2x^2 - 1 \leqslant 0$ et $4x - 3 \leqslant 0$ d'où $\frac{-\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$et $x \leqslant \frac{3}{4}$ donc lorsque $\frac{-\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.
La probabilité est alors de 5/36 + 25/36, c'est-à-dire 5/6.

3)
a) On doit « tester » les quatre différentes possibilités : aucune ne donne un entier.
b) Le 4e résultat est le plus probable (il est plus probable que l'union des 3 autres ! Donc même si les 3 autres donnent le même résultat, celui-ci « suffit »). Donc $4x - 3 = 2020$ et $x = \frac{2023}{4}$.

4) Le carré d'un nombre impair est impair et le carré d'un nombre pair est pair. (bonus si justifié)
On prend x impair.

- x^4 est impair ;
- $2x^2 - 1$ est impair (multiple de 2 moins 1) ;
- $(2x-1)^2$ est impair (carré d'un nombre impair) ;
- $4x - 3$ est impair (car il s'écrit $2 \times (2x - 2) + 1$).

Anna a raison : la probabilité d'obtenir un nombre pair est donc nulle.

5) « A coup sûr » → on doit obtenir une probabilité de 36/36 donc que tous les résultats soient identiques !

On peut raisonner de plusieurs façons : représentations graphiques, essais…
La valeur 1 apparaît alors facilement comme obtenue « à coup sûr » si $x = 1$.

Est-ce la seule valeur ? (ce qui se conjecture graphiquement).
On peut procéder par condition nécessaire.

Tous les résultats devant étant identiques on résout, par exemple, l'équation $2x^2 - 1 = 4x - 3$ car on choisit les expressions les plus "simples". Cela donne $2x^2 - 4x + 2 = 0$, soit $x^2 - 2x + 1 = 0$, soit $(x-1)^2 = 0$. La seule solution possible, si elle existe, est donc 1 et on vérifie (si on ne l'a pas déjà fait) que c'est bien le nombre cherché puisque les quatre résultats donnent 1 pour $x = 1$.

Exercice académique n°2 - Tuyaux, tarte et boules...

1) Les triangles OMA et OMB sont rectangles respectivement en A et B avec OA=OB.
On en déduit que les deux triangles sont superposables, donc MA=MB.
Autre méthode : On peut aussi utiliser deux fois le théorème de Pythagore...

2) Les droites (IJ) et (A'J) sont les tangentes au cercle (C1) en, respectivement, I et A'. D'après la question 1, JI=JA'. On montre de même que JI=JB'.
On en déduit alors que JA'=JB'. Comme le point J est situé sur [A'B'], alors J est le milieu de [A'B'].

3) Les deux triangles BJB' et BIJ sont superposables (d'après la question 1), donc les angles en J des triangles BJB' et BJI sont égaux. De même, les triangles AJA' et AJI sont superposables, donc les angles en J des triangles AJA' et AJI sont égaux.
Les points B', J et A' sont alignés dans cet ordre donc $180° = \widehat{\mathrm{B'JA'}} = \widehat{\mathrm{B'JI}} + \widehat{\mathrm{IJA'}} = 2\widehat{\mathrm{BJI}} + 2\widehat{\mathrm{IJA}}$.
On en déduit que $\widehat{\mathrm{BJI}} + \widehat{\mathrm{IJA}} = 90°$, donc $\widehat{\mathrm{BJA}} = 90°$.
Le triangle ABJ est donc rectangle en J.

4) Par construction le triangle ABP est rectangle en P et on a A'B' = BP.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABP rectangle en P on a $AB^2 = BP^2 + AP^2$ donc $(r+R)^2 = A'B'^2 + (R-r)^2$.
Ceci peut s'écrire encore $A'B'^2 = (r+R)^2 - (R-r)^2 = 4rR$.
Donc $A'B' = 2\sqrt{rR}$.

5) On note r=120 mm, R=480 mm et on utilise le résultat précédent : $A'B' = 2\sqrt{rR}$.
La tranchée a pour largeur r+A'B'+R soit encore $r+2\sqrt{rR} + R = 120+2\sqrt{120 \times 480} + 480$.
Ainsi la tranchée a pour largeur $600 + 2\sqrt{120^2 \times 4} = 600 + 2\times 240 = 1080$.
La tranchée a pour largeur 1080 mm soit 108 cm.

6) En reprenant les mêmes notations, on cherche r sachant que R=16 cm et on a la relation r + A'B' = R.
Ainsi $r+2\sqrt{rR} = R$ avec R = 16 cm donc $r+2\sqrt{16r} = 16$, ce qui équivaut à $r + 8\sqrt{r} = 16$.
Soit encore $\left(\sqrt{r}+4\right)^2 = 32 = (4\sqrt{2})^2$; on obtient $\sqrt{r}+4 = 4\sqrt{2}$ ou $\sqrt{r}+4 = -4\sqrt{2}$ et cette dernière valeur est impossible.
D'où $\sqrt{r} = 4\sqrt{2} - 4$ et en élevant au carré $r = 48 - 32\sqrt{2}$.
Le diamètre d'un petit pot vaut donc $96 - 64\sqrt{2}$ soit environ 55 mm.
Autre méthode : La distance « horizontale » (ou « verticale ») entre les deux centres vaut (R-r), donc la distance entre les deux centres vaut $(R-r)\sqrt{2}$ et elle vaut aussi (R+r).
Il reste à résoudre cette équation : $(R-r)\sqrt{2} = R + r$ soit $r\left(1+\sqrt{2}\right) = R(\sqrt{2}-1)$ soit $r = R(\sqrt{2}-1)^2$, soit $r = R\left(3-2\sqrt{2}\right) = 16\left(3-2\sqrt{2}\right)$.
Le diamètre d'un petit pot vaut donc $96 - 64\sqrt{2}$ soit environ 55 mm.

7) On note R et r les rayons respectifs de la boule et du cochonnet.
On applique la même méthode proposée comme « *autre méthode* » à la question précédente.
La distance « horizontale » (et aussi pour les deux autres directions) vaut (R-r), donc la distance entre les deux centres vaut $(R-r)\sqrt{3}$ et elle vaut aussi (R+r).
Il reste à résoudre l'équation : $(R-r)\sqrt{3} = R + r$, soit $r\left(1+\sqrt{3}\right) = R(\sqrt{3}-1)$, soit $r = 0{,}5R\left(\sqrt{3}-1\right)^2$, soit $r = \left(2-\sqrt{3}\right)R = 7\left(2-\sqrt{3}\right) = 14 - 7\sqrt{3}$ en cm.
Le rayon maximum du cochonnet vaut donc $(140 - 70\sqrt{3})$ mm.
En valeur approchée on obtient 18,76 mm et donc le rayon maximum en mm est 18 mm !

Exercice académique n°3 - Un petit tour en Zhabilie

Partie A

1) ***0***, ***1***, ***2***, ***3*** et ***4***.
2) ***322*** $=3\times5^2+2\times5^1+2\times5^0=3\times25+2\times5+2=75+10+2=87$.
3) Il s'agit de $1\times5^2+2\times5^1+3\times5^0=38$.
4) $31=25+5+1=1\times5^2+1\times5^1+1\times5^0$ soit ***111***.
   $5=1\times5^1+0\times5^0$ soit ***10.***
5) a) $5^5 = 3125 > 2020$ et $5^4 = 625 < 2020$ alors la décomposition de 2020 comportera des puissances de 5 jusqu'à l'exposant 4 et comportera 5 chiffres, et donc moins de 6 chiffres.
   b) $2020=3\times5^4+1\times5^3+0\times5^2+4\times5^1+0\times5^0$ soit ***31040***.
6) ***143*** correspond à $1\times5^2+4\times5^1+3\times5^0=48$ et ***14*** correspond à $1\times5^1+4\times5^0=9$.
   Donc ***143+14*** correspond à $48+9=57$.
   Or, ***11*** correspond à 6, si bien que $57=9\times6+3$.
   Il peut donc acheter 9 livres c'est à dire ***14*** livres !

Partie B

1) Le plus petit ***10000*** soit 625 et le plus grand est ***44444*** soit 3124 donc $625\leqslant \mathrm{N}\leqslant 3124$.
2) **a)** ***11*** correspond à 6 alors le nombre cherché est 11×6=66 qui s'écrit en zhabile ***231***.
   b) $47\times66=3102$ et $48\times66>3124$ donc le nombre cherché est 3102, c'est-à-dire ***44002.***
3) $5^7<100000<5^8$.

Algorithme : possibilité 1

- Entrer N
- Pour k allant de 0 à 7
  - Z $\leftarrow$ partie entière de $\frac{N}{5^{7-k}}$.
  - On écrit Z (côté droit)
  - N $\leftarrow N-Z\times5^{7-k}$
- Fin du Pour

Fonction en Python associée (non attendue)

```
def algo1(N):
    R=""
    for k in range(8):
        Z=floor(N/5**(7-k))
        R=R+str(Z)
        N=N-Z*5**(7-k)
    return(R)
```

Algorithme : possibilité 2

- Entrer N
- Pour k allant de 0 à 7
  - Q $\leftarrow$ 0
  - Tant que N $\geq 5^{7-k}$
    - N $\leftarrow N-5^{7-k}$
    - Q $\leftarrow$ Q+1
  - Fin tant que
  - Afficher Q
- Fin du Pour

Fonction en Python associée (non attendue)

```
def algo2(N):
    for k in range(8):
        Q=0
        while N>=5**(7-k):
            N=N-5**(7-k)
            Q=Q+1
        print(Q)
```

Autre fonction en Python possible

```
def conversion(N):
    R=N
    Z=""
    for i in range(8):
        if R !=0:
            Q=R//5
            Z=str(R%5)+Z
            R=Q
    return Z
```