MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

# Olympiades académiques de mathématiques 2020

---

# Académie de Rennes

## Mercredi 11 mars 2020

# Seconde Partie de 10h00 à 12h00

## Epreuve par équipes de 2 ou 3 candidats

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.**

La seconde partie est constituée des exercices académiques et résolue en équipes de 2 ou 3 candidats : **une seule copie par équipe**, portant les noms de tous les membres de l'équipe, est remise à la fin de l'épreuve.

**Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.**

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

# Exercices académiques

La seconde partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les équipes de candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques numéros 1 (*Opération Gamma*) et 2 (*Tuyaux, tarte et boules*).

Les autres équipes de candidats doivent traiter les exercices académiques numéros 1 (*Opération Gamma*) et 3 (*Un petit tour en Zhabilie*).

## *Exercice académique n°1*

***(à traiter par tous les candidats)***

**Opération Gamma**

On considère l'opération Gamma que l'on fait subir à un nombre réel $x$.
Voici son déroulement :

- 1re étape : on jette un dé équilibré à 6 faces :
  - Si le résultat est 6, on calcule $x^2$ ;
  - Sinon, on calcule $2x - 1$.
- 2e étape : on recommence la 1re étape avec le nombre obtenu.

  Le résultat final est alors noté $y$.

Exemple : appliquons l'opération Gamma au nombre $x = 4$.

- 1re étape : si le dé a donné un 6 alors on obtient $4^2 = 16$, sinon on obtient $2 \times 4 - 1 = 7$.
- 2e étape : on obtient quatre valeurs possibles : $y = 16^2 = 256$, $y = 2 \times 16 - 1 = 31$, $y = 7^2 = 49$ ou $y = 2 \times 7 - 1 = 13$.

**1)** On fait subir l'opération Gamma au nombre $x = -0{,}5$.

**a)** Quels sont les résultats possibles ? Détailler les calculs.
**b)** Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat final égal au nombre de départ, c'est-à-dire tel que $y = -0{,}5$ ? On pourra penser à utiliser un arbre de probabilités.
**c)** Quel est le résultat le plus probable ?

**2)** On fait subir l'opération Gamma à un nombre réel $x$ quelconque.

**a)** Déterminer, en fonction de $x$, les quatre résultats possibles.
**b)** Deux de ces résultats sont positifs quel que soit $x$. Lesquels et pourquoi ?
**c)** Comment faut-il choisir $x$ pour que la probabilité d'obtenir un résultat négatif soit la plus grande possible ? Quelle est alors cette probabilité ?

**3)** On souhaite obtenir $y = 2020$.

**a)** Montrer qu'il n'est pas possible d'obtenir 2020 si $x$ est un nombre entier.
**b)** Déterminer la valeur du réel $x$ pour laquelle il est le plus probable d'obtenir 2020.

**4)** Anna affirme que si le nombre $x$ est impair, la probabilité d'obtenir un nombre pair est nulle.
A-t-elle raison ?

**5)** Anna affirme que si elle choisit elle-même le nombre $x$, elle peut prédire « à coup sûr » le résultat final. À quel(s) nombre(s) $x$ pense-t-elle ?

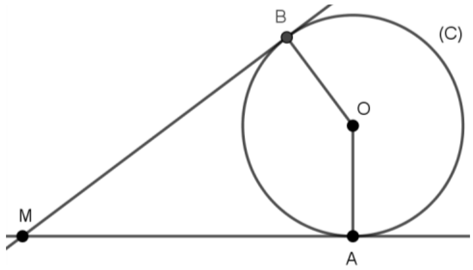
## *Exercice académique n°2*

***(à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)***

**Tuyaux, tarte et boules...**

Sur la figure ci-contre,

- (C) est un cercle de centre O
- M est un point extérieur au cercle (C)
- A et B sont deux points distincts appartenant au cercle (C)
- (MA) est la droite perpendiculaire à la droite (OA)
- (MB) est la droite perpendiculaire à la droite (OB)

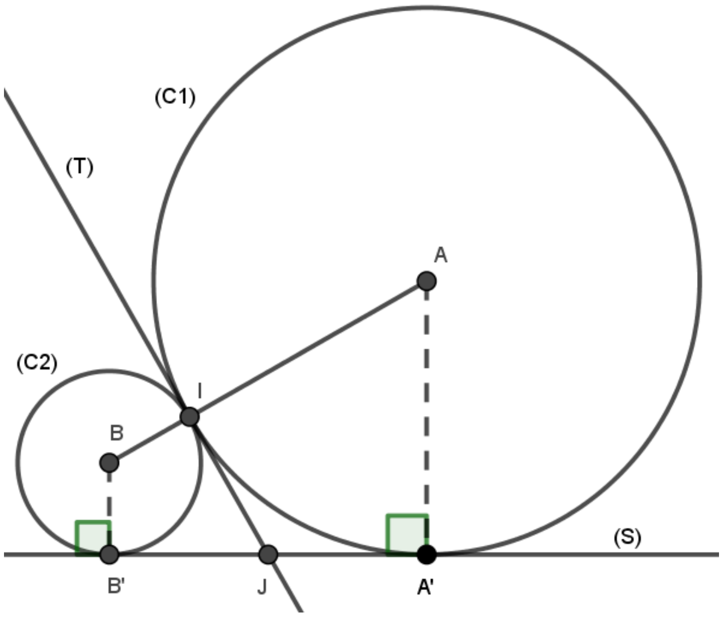



*Remarque : Les droites* (MA) *et* (MB) *sont appelées tangentes au cercle* (C) *en* A *et* B*.*

**1)** Démontrer que $MA = MB$.

Sur la figure ci-dessous,

- (C1) est un cercle de centre A et de rayon $R$
- (C2) est un cercle de centre B et de rayon $r$ avec $r < R$
- (C1) et (C2) se coupent en I, situé sur [AB]
- (T) est tangente en I à chacun des deux cercles, et appelée tangente commune aux cercles
- (S) est la tangente à (C1) en A' et la tangente à (C2) en B'
- J est le point d'intersection de la droite (T) et du segment [A'B']



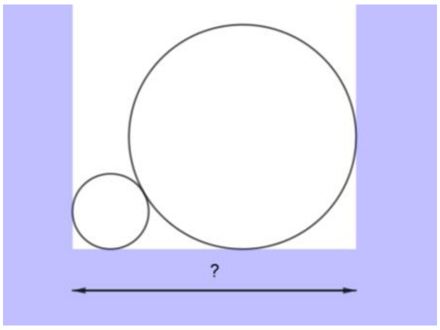

**2)** Démontrer que J est le milieu de [A'B'].

**3)** Justifier que le triangle ABJ est rectangle en J.

**4)** Démontrer que $A'B' = 2\sqrt{Rr}$.

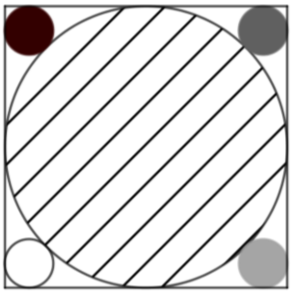
On pourra utiliser, par exemple, le point P sur le segment [AA'] tel que le triangle ABP soit rectangle en P.

Dans le fond d'une tranchée creusée dans le sol, on veut placer deux tuyaux comme indiqué ci-dessous.
Le gros tuyau a un diamètre de 480 mm et le petit tuyau a un diamètre de 120 mm.



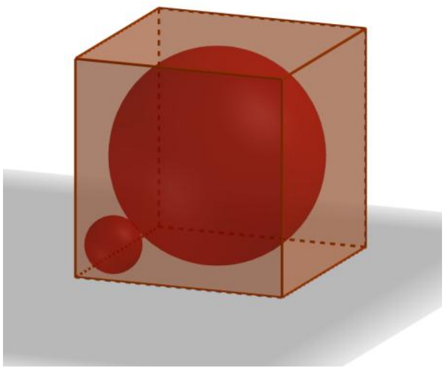

**5)** Quelle est la largeur de cette tranchée en cm ?

Le dessin ci-dessous représente une tarte de diamètre 32 cm qui a été placée au plus juste dans une boîte carrée. De plus, dans chaque coin de cette boîte, il y a un petit pot de crème.



**6)** Quel est le diamètre d'un petit pot arrondi au mm ?

Le dessin ci-dessous représente une boule bretonne placée dans une boîte cubique d'arête 14 cm de façon qu'elle « touche » les six faces de la boîte.



**7)** Quel est le rayon maximum en mm du cochonnet (petite boule) placé dans le coin du cube ? On donnera la valeur exacte.

# *Exercice académique n°3*

***(à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)***

## Un petit tour en Zhabilie

Actuellement, nous comptons en base 10, c'est-à-dire que nous décomposons tout nombre en somme de puissances de 10. Avoir 10 doigts est sans doute une des raisons du choix mathématique de cette base.

Ainsi, en base 10 :

- 56 se décompose en $5 \times 10^1 + 6 \times 10^0$ ;
- $3 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 2 \times 10^0$ s'écrit 302.

Cela nous permet d'écrire tous les nombres avec dix symboles seulement : les chiffres 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.

Si on envisage la base 8, on utilise les 8 chiffres de 0 à 7 :

- 56 se décompose alors en $7 \times 8^1 + 0 \times 8^0$ et s'écrit **70 ;**
- 302 se décompose alors en $4 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 6 \times 8^0$ et s'écrit **456.**

| | |
|---|---|
| Dans un pays, il a été décidé de compter sur les doigts d'une seule main. De ce fait, leur système numérique fonctionne en base 5.<br><br>Ce pays s'appelle la Zhabilie ! | **Fiche d'identité du pays :** ZHABILIE<br>**Habitants :** Les Zhabiles<br>**Capitale :** Pentagonie<br>**Nombre d'habitants :** ***<u>3 442 000</u>***<br>**Superficie :** ***<u>34 101</u>*** km$^2$<br>**Monnaie :** le Penta |

Les symboles des chiffres utilisés en Zhabilie sont les mêmes que les nôtres.
Pour le différencier d'un de nos nombres, un nombre zhabile sera écrit en ***<u>italique gras souligné</u>***.

**<u>Partie A</u>**

1) Citer les chiffres utilisés en Zhabilie.
2) Justifier que, quand un Zhabile écrit ***<u>322</u>***, il s'agit pour nous de 87.
3) Quand un Zhabile écrit ***<u>123</u>***, de quel nombre s'agit-il pour nous (en base 10) ?
4) Donner l'écriture zhabile de 31 puis celle de 5.
5) Nous sommes en 2020.
   a) Justifier que ce nombre s'écrit en zhabile avec moins de 6 chiffres.
   b) Déterminer l'écriture en zhabile de 2020.
6) Zhabilou a économisé ***<u>143</u>*** Pentas et en reçoit ***<u>14</u>*** supplémentaires à l'occasion de son anniversaire. Il souhaite s'acheter un maximum de livres de maths à ***<u>11</u>*** Pentas l'unité. Combien peut-il en acquérir ? (on répondra à la manière d'un Zhabile)

**<u>Partie B</u>**

1) Un nombre N s'écrit avec 5 chiffres (dont le premier est non nul) en zhabile. Donner un encadrement le plus précis possible de N (en base 10).
2) a) Déterminer le plus petit nombre zhabile divisible par 11 et par ***<u>11</u>.***
   b) Déterminer le plus grand nombre zhabile à 5 chiffres divisible par 11 et par ***<u>11</u>.***
3) Proposer un algorithme qui permette, dans le cas général, de convertir en zhabile un nombre N inférieur à 100 000.