

Produit scalaire – TEST pour s'auto-évaluer

Dans le Test Moodle les questions seront proposées dans l'ordre ci-dessous.

Question 1 :

Dans un repère orthonormé, on donne les points **A(-2 ; 3)** et **B(4 ; -1)**.
La longueur AB est égale à :

$\sqrt{52}$ 52 $\sqrt{8}$ $\sqrt{20}$

CORRECTION :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 - (-2) = 6 \\ -1 - 3 = -4 \end{pmatrix} \text{ donc } \mathbf{AB} = \|\vec{AB}\| = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{36 + 16} = \mathbf{\sqrt{52}}$$

Question 2 :

Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) ,

1) on donne les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est égal à

2) on donne les vecteurs $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{v} = 0,5\vec{i} - \vec{j}$

le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est égal à

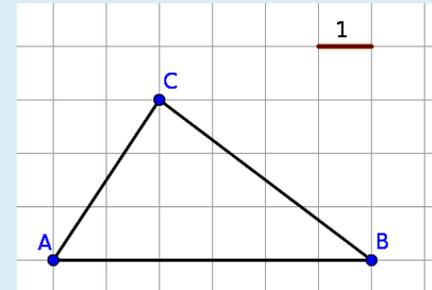
CORRECTION :

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = 1 \times (-5) + (-3) \times (-2) = -5 + 6 = \mathbf{1}$

2) On a donc $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \times 0,5 + 3 \times (-1) = \mathbf{-4}$

Question 3 :

Calculer les produits scalaires suivants :



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} =$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CA} =$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} =$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{BA} =$$

CORRECTION :

Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). On a alors :

1) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = 6 \times 2 = \mathbf{12}$

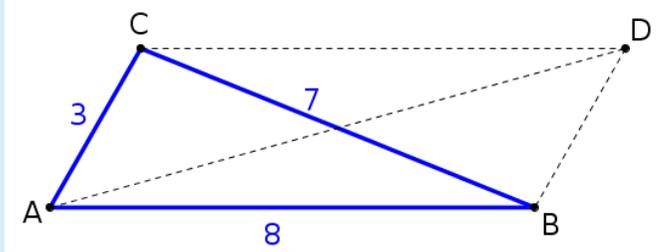
2) $\vec{AB} \cdot \vec{CA} = -\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \mathbf{-12}$

3) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{AB} \cdot \vec{BH} = -6 \times 4 = \mathbf{-24}$

4) $\vec{BC} \cdot \vec{BA} = \vec{BA} \cdot \vec{BC} = -\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -(-24) = \mathbf{24}$

Question 4 :

ABDC est un parallélogramme.



$$1) \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) =$$

2) Une autre expression de $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ est :

$$\frac{1}{2}(AD^2 - AB^2 - AC^2) \quad \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - AD^2) \quad \frac{1}{2}(BC^2 - AD^2)$$

3) En déduire la valeur exacte de AD.

$$AD = \sqrt{97} \quad AD = 7 \quad AD = \sqrt{170}$$

CORRECTION :

$$1) \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{AB} - \vec{AC}\|^2) = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

$$\text{donc } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(8^2 + 3^2 - 7^2) = 12$$

$$2) \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AD^2 - AB^2 - AC^2)$$

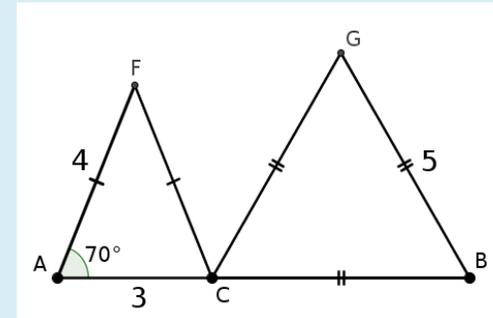
$$3) \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AD^2 - 8^2 - 3^2) = \frac{1}{2}(AD^2 - 73)$$

$$\text{Or } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 12 \quad \text{donc } \frac{1}{2}(AD^2 - 73) = 12$$

$$AD^2 - 73 = 24 \quad AD^2 = 97 \quad \text{donc } AD = \sqrt{97} \approx 9,85$$

Question 5 :

Observer bien le codage de la figure géométrique ci-dessous et calculer les trois produits scalaires demandés.



$$1) \vec{AC} \cdot \vec{AF} = 12 \cos(70^\circ) \quad 7 \cos(70^\circ) \quad 12 \sin(70^\circ) \quad 4,1$$

$$2) \vec{CB} \cdot \vec{CG} =$$

$$3) \vec{CF} \cdot \vec{CG} = 20 \cos(50^\circ) \quad 20 \cos(70^\circ) \quad 20 \cos(130^\circ) \quad -3,75$$

CORRECTION :

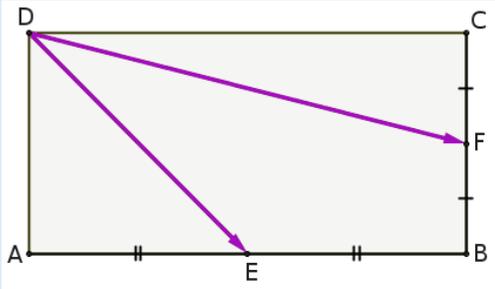
$$1) \vec{AC} \cdot \vec{AF} = AC \times AF \times \cos(\widehat{CAF}) = 4 \times 3 \times \cos(\widehat{CAF}) = 12 \cos(\widehat{CAF})$$

$$2) \vec{CB} \cdot \vec{CG} = CA \times CG \times \cos(\widehat{BCG}) = 5 \times 5 \times \cos(60^\circ) = 25 \times \frac{1}{2} = 12,5$$

$$3) \text{ On a } CF = 4 ; CG = 5 \text{ et l'angle } \widehat{FCG} \text{ mesure } 180^\circ - 70^\circ - 60^\circ = 50^\circ \\ \text{donc } \vec{CF} \cdot \vec{CG} = CF \times CG \times \cos(\widehat{FCG}) = 4 \times 5 \times \cos(50^\circ) = 20 \cos(50^\circ)$$

Question 6 :

ABCD est un rectangle de longueur AB=12 et de largeur BC=6.
E est le milieu de [AB] et F le milieu de [BC].



Quelles sont les **deux expressions les plus adaptées** pour calculer le produit scalaire $\vec{DE} \cdot \vec{DF}$?

On utilise le repère orthonormé $(A, \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}, \frac{\vec{AD}}{\|\vec{AD}\|})$

dans lequel les coordonnées de \vec{DE} et \vec{DF} sont faciles à trouver et on utilise la formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

On utilise la formule $\vec{DE} \cdot \vec{DF} = DE \times DF \times \cos(\widehat{EDF})$

On utilise la formule $\vec{DE} \cdot \vec{DF} = \frac{1}{2}(DE^2 + DF^2 - EF^2)$

On utilise la formule $\vec{DE} \cdot \vec{DF} = \frac{1}{2}(\|\vec{DE} + \vec{DF}\|^2 - \|\vec{DE}\|^2 - \|\vec{DF}\|^2)$

On utilise la décomposition $\vec{DE} \cdot \vec{DF} = (\vec{DA} + \vec{AE}) \cdot (\vec{DC} + \vec{CF})$

Soit H le projeté orthogonal de E sur (DF).

On utilise alors la formule $\vec{DE} \cdot \vec{DF} = \vec{DH} \cdot \vec{DF}$

CORRECTION :

- On utilise le repère orthonormé $(A, \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}, \frac{\vec{AD}}{\|\vec{AD}\|})$ dans lequel les coordonnées de \vec{DE} et \vec{DF} sont faciles à trouver et on utilise la formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Complément : Dans ce repère, $\vec{DE} \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{DF} \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\vec{DE} \cdot \vec{DF} = 6 \times 12 + (-6) \times (-3) = 72 + 18 = \mathbf{90}$$

- On peut aussi utiliser la décomposition

$$\vec{DE} \cdot \vec{DF} = (\vec{DA} + \vec{AE}) \cdot (\vec{DC} + \vec{CF})$$

Complément : en développant, on obtient

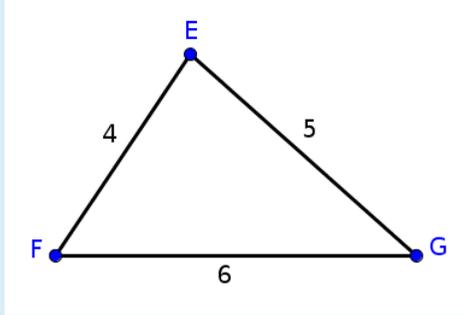
$$\vec{DE} \cdot \vec{DF} = \vec{DA} \cdot \vec{DC} + \vec{DA} \cdot \vec{CF} + \vec{AE} \cdot \vec{DC} + \vec{AE} \cdot \vec{CF}$$

$$\vec{DE} \cdot \vec{DF} = 0 + 6 \times 3 + 6 \times 12 + 0$$

$$\vec{DE} \cdot \vec{DF} = \mathbf{90}$$

Question 7 :

EFG est un triangle tel que $EF=4$, $EG = 5$ et $FG = 6$



1) En utilisant la formule avec les normes, on obtient :

$$\vec{EF} \cdot \vec{EG} =$$

2) En utilisant la formule avec le cosinus, on obtient :

$$\vec{EF} \cdot \vec{EG} = 20 \cos(\widehat{FEG}) \quad \vec{EF} \cdot \vec{EG} = 9 \cos(\widehat{FEG})$$

$$\vec{EF} \cdot \vec{EG} = 24 \cos(\widehat{FEG}) \quad \vec{EF} \cdot \vec{EG} = 30 \cos(\widehat{FEG})$$

3) En utilisant les deux expressions de $\vec{EF} \cdot \vec{EG}$ précédentes on en déduit la valeur exacte de $\cos(\widehat{FEG})$. Laquelle ?

$$\cos(\widehat{FEG}) = \frac{1}{8} \quad \cos(\widehat{FEG}) = \frac{1}{4} \quad \cos(\widehat{FEG}) = \frac{4}{5} \quad \cos(\widehat{FEG}) = \frac{5}{18}$$

4) Donner alors une valeur arrondie à 0,1 près de l'angle \widehat{FEG} .

$$\widehat{FEG} \approx \quad (\text{valeur arrondie à } 0,1^\circ \text{ près})$$

CORRECTION :

$$1) \vec{EF} \cdot \vec{EG} = \frac{1}{2} (\|\vec{EF}\|^2 + \|\vec{EG}\|^2 - \|\vec{EF} - \vec{EG}\|^2) = \frac{1}{2} (EF^2 + EG^2 - FG^2)$$

$$\vec{EF} \cdot \vec{EG} = \frac{1}{2} (4^2 + 5^2 - 6^2) = \frac{5}{2}$$

$$2) \vec{EF} \cdot \vec{EG} = EF \times EG \times \cos(\widehat{FEG}) = 20 \cos(\widehat{FEG})$$

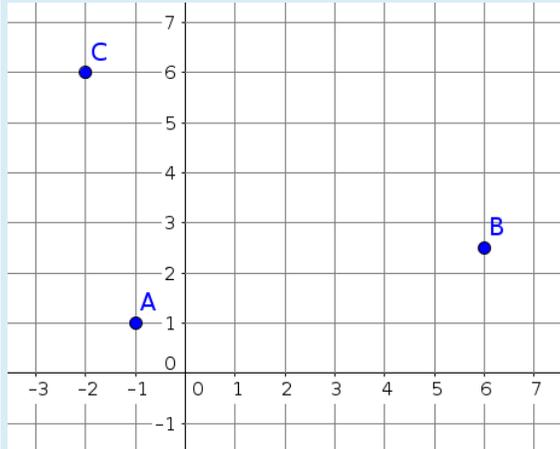
$$3) 20 \cos(\widehat{FEG}) = \frac{5}{2} \text{ et donc } \cos(\widehat{FEG}) = \frac{5}{2} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{8}$$

$$4) \cos(\widehat{FEG}) = \frac{1}{8} \text{ donc } \widehat{FEG} \approx 82,8^\circ \text{ valeur arrondie à } 0,1^\circ \text{ près}$$

Question 8 :

Dans un repère orthonormé, on donne les points :

A(-1 ; 1) ; B(6 ; 2,5) et C(-2 ; 6)



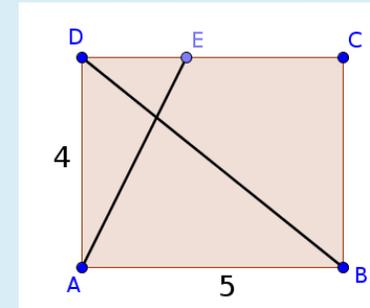
1) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} =$

2) Les droites (AB) et (AC) sont-elles perpendiculaires ?

Question 9 :

ABCD est un rectangle de longueur $AB = 5$ cm et de largeur $AD = 4$ cm. E est un point mobile sur [CD].

On désigne par x la longueur **DE**.



1) Exprimer en fonction de x le produit scalaire $\vec{AE} \cdot \vec{DB}$.

$$\vec{AE} \cdot \vec{DB} = 5x - 16 \quad \vec{AE} \cdot \vec{DB} = -4x - 20$$

$$\vec{AE} \cdot \vec{DB} = -4x + 20 \quad \vec{AE} \cdot \vec{DB} = 5x + 16$$

2) Où faut-il placer le point E pour que les droites (DB) et (AE) soient perpendiculaires ?

à 3,2 cm de D

au milieu de [CD]

Il faut placer E sur le point C

à 3 cm de D.

CORRECTION :

$$1) \vec{AB} \begin{pmatrix} 6 - (-1) = 7 \\ 2,5 - 1 = 1,5 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} -2 - (-1) = -1 \\ 6 - 1 = 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 7 \times (-1) + 1,5 \times 5 = -7 + 7,5 = \mathbf{0,5}$$

2) Le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ n'est pas nul donc **les droites (AB) et (AC) ne sont pas perpendiculaires.**

CORRECTION :

1) * On peut utiliser le repère orthonormé $(A, \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}, \frac{\vec{AD}}{\|\vec{AD}\|})$

Dans ce repère, $\vec{AE} \begin{pmatrix} x \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{DB} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\text{donc } \vec{AE} \cdot \vec{DB} = x \times 5 + 4 \times (-4) = 5x - 16$$

* On peut aussi utiliser une décomposition des vecteurs \vec{AE} et \vec{DB}

$$\vec{AE} \cdot \vec{DB} = (\vec{AD} + \vec{DE}) \cdot (\vec{DA} + \vec{AB})$$

$$\vec{AE} \cdot \vec{DB} = \vec{AD} \cdot \vec{DA} + \vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{DE} \cdot \vec{DA} + \vec{DE} \cdot \vec{AB}$$

$$\vec{AE} \cdot \vec{DB} = 4 \times (-4) + 0 + 0 + 5 \times x$$

$$\vec{AE} \cdot \vec{DB} = 5x - 16$$

2) On veut que ce produit scalaire soit nul donc il faut choisir x

$$\text{de telle sorte que } 5x - 16 = 0 \text{ donc } x = \frac{16}{5} = 3,2$$

Il faut placer le point E à 3,2 cm de D.

Produit scalaire – TEST complémentaire

Question 1 :

ABCD est un rectangle de longueur AB=6 et de largeur AD=4.

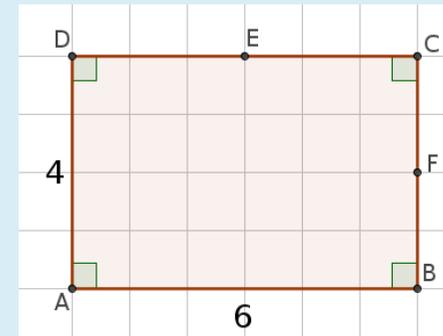
E est le milieu de [CD] et F est le milieu de [BC].

Calculer les différents produits scalaires demandés.

Un exemple : Calcul de $\vec{DE} \cdot \vec{DB}$.

C est le projeté orthogonal de B sur (DE) donc :

$$\vec{DE} \cdot \vec{DB} = \vec{DE} \cdot \vec{DC} = 3 \times 6 = 18$$



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} =$$

$$\vec{DB} \cdot \vec{DA} =$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} =$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} =$$

$$\vec{AE} \cdot \vec{AB} =$$

$$\vec{EF} \cdot \vec{CD} =$$

$$\vec{ED} \cdot \vec{EF} =$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{CF} =$$

CORRECTION :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = 36 \quad B \text{ est le projeté orthogonal de } C \text{ sur } (AB)$$

$$\vec{DB} \cdot \vec{DA} = \vec{DA} \cdot \vec{DA} = 16 \quad A \text{ est le projeté orthogonal de } B \text{ sur } (DA)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 6 \times (-6) = -36 \quad \vec{AB} \text{ et } \vec{CD} \text{ sont colinéaires}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \quad \vec{AB} \text{ et } \vec{BC} \text{ sont orthogonaux}$$

$$\vec{AE} \cdot \vec{AB} = \vec{AH} \cdot \vec{AB} = 3 \times 6 = 18 \quad H \text{ désigne le milieu de } [AB]$$

$$\vec{EF} \cdot \vec{CD} = \vec{EC} \cdot \vec{CD} = 3 \times (-6) = -18 \quad C \text{ est le projeté orthogonal de } F \text{ sur } (CD)$$

$$\vec{ED} \cdot \vec{EF} = \vec{ED} \cdot \vec{EC} = 3 \times (-3) = -9 \quad C \text{ est le projeté orthogonal de } F \text{ sur } (ED)$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{CF} = \vec{BC} \cdot \vec{CF} = 4 \times (-2) = -8 \quad B \text{ est le projeté orthogonal de } A \text{ sur } (CF)$$

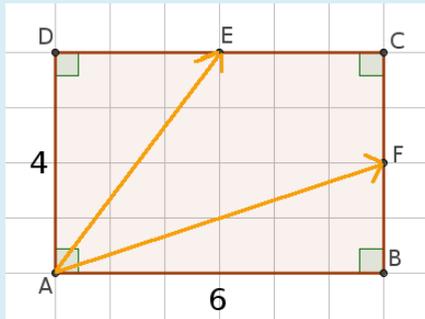
Question 2 :

ABCD est un rectangle de longueur AB=6 et de largeur AD=4.
E est le milieu de [CD] et F est le milieu de [BC].

Partie A :

$$\vec{AE} \cdot \vec{AF} =$$

Indication :
utiliser un repère orthonormé
ou une décomposition des
vecteurs \vec{AE} et \vec{AF}

**CORRECTION :**

* On utilise le repère orthonormé $(A, \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}, \frac{\vec{AD}}{\|\vec{AD}\|})$

Dans ce repère, $\vec{AE} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{AF} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

donc $\vec{AE} \cdot \vec{AF} = 3 \times 6 + 4 \times 2 = 26$

* Avec une décomposition des vecteurs \vec{AE} et \vec{AF} :

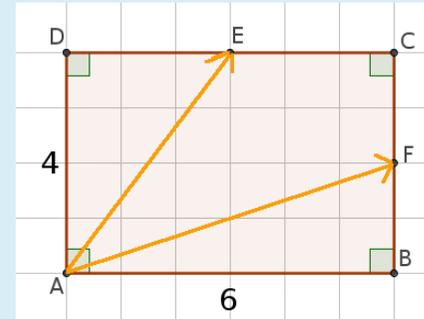
$$\vec{AE} \cdot \vec{AF} = (\vec{AD} + \vec{DE}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BF}) = \vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{AD} \cdot \vec{BF} + \vec{DE} \cdot \vec{AB} + \vec{DE} \cdot \vec{BF}$$

$$\vec{AE} \cdot \vec{AF} = 0 + 4 \times 2 + 3 \times 6 + 0$$

$$\vec{AE} \cdot \vec{AF} = 26$$

Question 3:

ABCD est un rectangle de longueur AB=6 et de largeur AD=4.
E est le milieu de [CD] et F est le milieu de [BC].

**Partie B :**

1) Calculer les longueurs AE et AF

$$AE =$$

$$AF = 5 \quad \sqrt{40} \quad \sqrt{32}$$

2) On en déduit que $\vec{AE} \cdot \vec{AF} =$

$$5\sqrt{40} \times \cos(\widehat{EAF}) \quad 5\sqrt{32} \times \cos(\widehat{EAF}) \quad 7\sqrt{40} \times \cos(\widehat{EAF})$$

CORRECTION :

1) Les triangles ADE et ABF sont rectangles en D et en B donc :

$$AE = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \quad AF = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$$

2) $\vec{AE} \cdot \vec{AF} = AE \times AF \times \cos(\widehat{EAF}) = 5\sqrt{40} \times \cos(\widehat{EAF})$

Question 4 :

ABCD est un rectangle de longueur $AB=6$ et de largeur $AD=4$.
E est le milieu de [CD] et F est le milieu de [BC].

Aux questions précédentes, on a obtenu :

$$\vec{AE} \cdot \vec{AF} = 26 \quad (\text{Partie A})$$

$$\vec{AE} \cdot \vec{AF} = 5\sqrt{40} \times \cos(\widehat{EAF}) \quad (\text{Partie B})$$

Partie C :

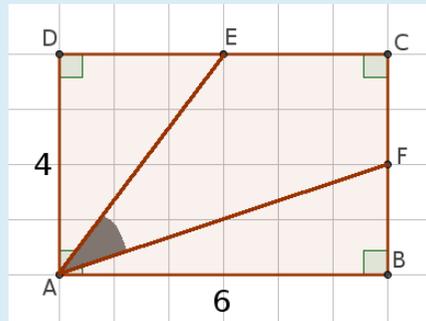
1) En déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{EAF})$.

$$\cos(\widehat{EAF}) = \frac{26}{5\sqrt{40}}$$

$$\cos(\widehat{EAF}) = \frac{5\sqrt{40}}{26}$$

$$\cos(\widehat{EAF}) = 130\sqrt{40}$$

$$\cos(\widehat{EAF}) = 0,8$$



2) Donner alors une valeur approchée à $0,1^\circ$ près l'angle \widehat{EAF} .

Réponse : $\widehat{EAF} \approx$

CORRECTION :

$$1) \vec{AE} \cdot \vec{AF} = 26 \quad \text{et} \quad \vec{AE} \cdot \vec{AF} = 5\sqrt{40} \times \cos(\widehat{EAF})$$

$$\text{Donc } 5\sqrt{40} \times \cos(\widehat{EAF}) = 26 \quad \text{et donc} \quad \cos(\widehat{EAF}) = \frac{26}{5\sqrt{40}}$$

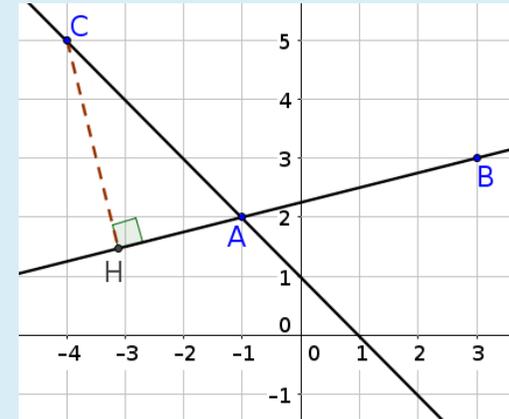
2) A la calculatrice, on obtient : $\widehat{EAF} \approx 34,7^\circ$ arrondi à $0,1^\circ$ près

Question 5 :

Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a placé trois points A, B et C. H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Donner la valeur exacte de AH.

$$AH = \frac{9\sqrt{17}}{17} \quad AH = \frac{15\sqrt{17}}{17} \quad AH = \frac{9}{\sqrt{5}} \quad AH = \sqrt{5}$$

**CORRECTION :**

Méthode :

On calcule le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ de deux façons différentes.

Première façon : avec les coordonnées

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times (-3) + 1 \times 3 = -9$$

Deuxième façon : avec le projeté orthogonal

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = -AB \times AH \quad \text{Or} \quad AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$\text{donc} \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -\sqrt{17} \times AH$$

Les deux expressions du produit scalaire sont égales donc :

$$-9 = -\sqrt{17} \times AH \quad \text{donc} \quad AH = \frac{9}{\sqrt{17}} = \frac{9\sqrt{17}}{17} \approx 2,18$$