

1. Donner la définition et la signification de l'intervalle de fluctuation vu en seconde.

2. a) Justifier que pour tout $x \in [0;1]$ $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$

b) Montrer que $\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \subset \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$

c) Que peut-on en déduire pour $P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$?

3. a) En utilisant le théorème de Moivre Laplace, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \int_{-\frac{1}{\sqrt{p(1-p)}}}^{\frac{1}{\sqrt{p(1-p)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

b) En utilisant la question 2.a) que peut-on en déduire pour $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$?

c) En exploitant la définition de la limite d'une suite, justifier qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,
 $P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0,95$.

d) Relier ce résultat à la question 1.

4. a) Déduire de la question 3., que pour tout $p \in]0 ; 1[$ il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0,95 .$$

b) Interpréter le résultat dans le cas où p est inconnue.

5. On expérimente un médicament permettant de faire baisser la tension artérielle et on décide de réaliser un test « en double aveugle » sur deux groupes de 100 patients hyper-tendus.

Le groupe B reçoit le médicament et le groupe A un placebo. Ni le personnel qui administre le traitement, ni les patients ne savent quel groupe reçoit le médicament.

Dans le groupe A, 56 personnes ont vu leur tension baisser et dans le groupe B, 65 personnes ont vu leur tension baisser.

a. Procéder à une estimation de la proportion de personnes dont la tension baisse après avoir pris le médicament, à l'aide d'un intervalle de confiance de niveau 0,95.

b. Procéder à une estimation de la proportion de personnes dont la tension baisse après avoir pris un placebo, à l'aide d'un intervalle de confiance de niveau 0,95.

c. Quelle taille aurait dû avoir chacun des groupes pour pouvoir conclure à l'efficacité du médicament, avec des fréquences observées identiques aux précédentes dans chaque échantillon ?