

Aire et Monte-Carlo

Partie A :

Une expérience consiste à choisir un point M au hasard dans un carré ABCD de côté 1.

On note E l'événement : « La distance AM est strictement inférieure à 1 »

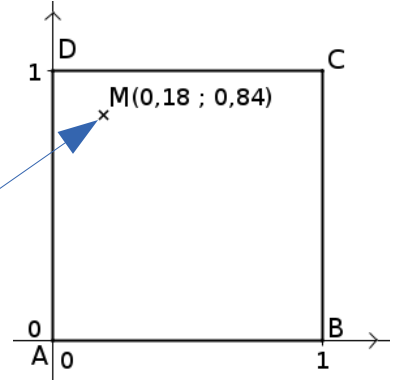
→ Objectif de cette partie : on voudrait estimer la probabilité de cet événement E.

On simule cette expérience par l'algorithme suivant :

```

x prend une valeur aléatoire dans [0,1[
y prend une valeur aléatoire dans [0,1[
M a pour coordonnées (x ; y) dans un repère orthonormé
  Si la distance AM est strictement inférieure à 1 alors
    Le point M(x ; y) est colorié en rouge (l'événement E est réalisé)
  Sinon
    Le point M(x ; y) est colorié en bleu
  FinSi

```



a) On a exécuté l'algorithme et on a obtenu le point M ci-dessus. L'événement E est-il réalisé ?
Ce point M sera-t-il en rouge ou en bleu ? Justifier.

Et si on avait obtenu M(0,82 ; 0,59), de quelle couleur serait-il ?

b) On a complété, ci-dessous, l'algorithme précédent pour obtenir plusieurs points M dans le carré.

```

Saisir N
La variable Compteur prend la valeur 0
Pour i allant de 1 à N faire
  x prend une valeur aléatoire dans [0,1[
  y prend une valeur aléatoire dans [0,1[
  M a pour coordonnées (x ; y)
  Si la distance AM est strictement inférieure à 1 alors
    Le point M(x ; y) est colorié en rouge
    Compteur prend la valeur Compteur + 1
  Sinon
    Le point M(x ; y) est colorié en bleu
  FinSi
FinPour
La variable F prend la valeur  $\frac{\text{Compteur}}{N}$ 
Afficher F

```

Quels sont les rôles des variables suivantes ?

N :

.....

Compteur :

.....

F :

.....

c) Ouvrir le fichier **Monte_Carlo.alg** avec Algobox. Exécuter le programme et compléter le tableau.

N	10	100	1 000			
Valeur F obtenue						

Quelle conjecture peux-tu faire concernant la probabilité de l'événement E ?

Peux-tu donner la valeur exacte de p(E) ?

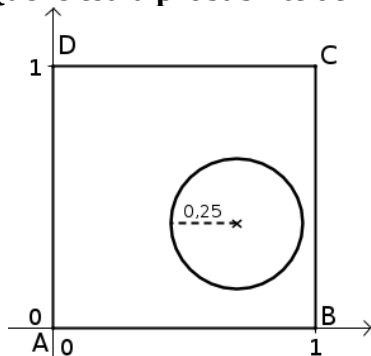
Partie B : Trois calculs défis

Calcul 1 :

On choisit à nouveau un point M au hasard dans un carré ABCD de côté 1. On note F l'événement suivant :

« Le point M se trouve dans le disque de rayon 0,25 tracé ci-dessous »

Quelle est la probabilité de F ?



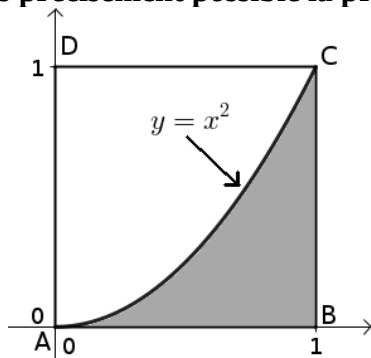
Ma démarche :

Calcul 2 :

On choisit à nouveau un point M au hasard dans un carré ABCD de côté 1. On note G l'événement suivant :

« Le point M se trouve sous la parabole d'équation $y = x^2$ »

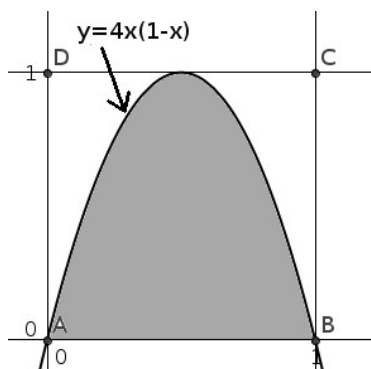
Estimer le plus précisément possible la probabilité de G.



Ma démarche :

Calcul 3 :

Estimer le plus précisément possible l'aire grisée ci-dessous.



Ma démarche :

Prolongement possible :

Quatre élèves ont exécuté le programme précédent pour différentes valeurs de N et ont reporté dans le tableau ci-dessous les fréquences F obtenues.

N	10	100	1 000	10 000	100 000
Fréquences F obtenues par Mathieu	0,6	0,76	0,766	0,7883	0,78547
Fréquences F obtenues par Baptiste	1	0,82	0,786	0,7852	0,78681
Fréquences F obtenues par Chloé	0,9	0,72	0,802	0,7925	0,78605
Fréquences F obtenues par Agathe	0,7	0,83	0,783	0,7974	0,79038

Commenter au fur et à mesure la discussion tenue entre ses quatre élèves :

Mathieu dit : « *Tiens c'est bizarre, aucun de nous quatre n'obtient les mêmes fréquences et pourtant nous avons exécuté le même programme avec les mêmes valeurs de N !* »

Chloé dit : « *C'est bizarre que Baptiste obtienne $F = 1$ pour $N = 10$! Tu as fait une erreur en recopiant !* »

Agathe dit : « *Il y a un truc qui cloche, à la fin j'obtiens 0,79 et pas 0,78 ! Il y avait peut-être une erreur dans mon programme mais je l'ai supprimé !* »

Baptiste intervient : « *Domage ! Mais je crois qu'il y a un moyen de savoir si c'est normal ou pas !* »

Commentaire pour l'enseignant concernant ce prolongement :

Les fréquences données par l'élève Agathe (4^{ième} ligne du tableau) ont été obtenues en remplaçant la ligne « Si $((x*x+y*y) \leq 1)$ alors » du programme Monte_Carlo.alg par « Si $((x*x+x*y) \leq 1)$ alors » comme indiqué sur la capture ci-dessous.

```
▼ POUR i ALLANT_DE 1 A N
  -DEBUT_POUR
  -x PREND_LA_VALEUR random()
  -y PREND_LA_VALEUR random()
  ▼ SI  $((x*x+x*y) \leq 1)$  ALORS
    -DEBUT_SI
    -TRACER_POINT (x,y)
    -Compteur PREND_LA_VALEUR Compteur+1
```