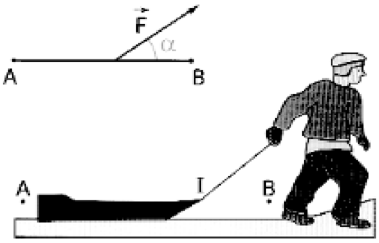
Produit scalaire – Phase 5

Exercice 1 :

Rappel :

En physique, une force s'exprime en newton (N), un travail W s'exprime en joule (J) et une distance s'exprime en mètres (m).

Le travail d'une force constante $\vec{F}$ qui s'exerce sur un wagon W qui se déplace de A vers B en suivant un mouvement rectiligne est donné par la formule suivante : $W = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{F}$



Un enfant tire une luge sur un sol horizontal par l'intermédiaire d'une corde formant un angle $\alpha = 45°$ avec le sol.

Il exerce ainsi sur la luge une force $\vec{F}$ constante et il parcourt la distance AB. On pose $\|\vec{F}\| = 100$ N et AB = 10m.

Calculer le travail (en J) de la force $\vec{F}$ lors du déplacement de A jusqu'en B.

Exercice 2 :

On se place dans un repère orthonormé.
1) Déterminer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ dans chacun des cas suivants

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ → Correction vidéo :

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{1}{10}\\-\frac{9}{5}\end{pmatrix}$

2) Calculer la norme du vecteur $\vec{v}$ dans chacun des cas précédents.

Exercice 3 :

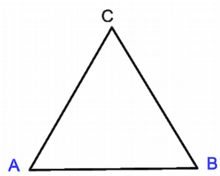
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, où les points A, B, C sont tels que :

1) AB = 3, AC = 8 et $\widehat{BAC}$ = 30°.

2) AB = 2 et $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 45°$

Exercice 4 :

1) Soit ABC un triangle équilatéral de côté 5.
Calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



→ Correction vidéo :

2) ABCD est un carré de côté 4.
Déterminer le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

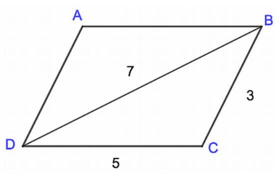
→ Correction vidéo :

Exercice 5 :

ABCD est un parallélogramme.
1) Calculer le produit scalaire de

a) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}$

b) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$



→ Correction vidéo :

Exercice 6 : On a dans un repère orthonormé : $A(2;-1)$, $B(4;2)$, $C(4;0)$ et $D(1;2)$

1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.
2) Qu'en déduit-on pour les droites (AB) et (CD) ?

Exercice 7 : (correction en classe entière)

Dans un repère orthonormé, on a : A(0 ; 2), B(–1 ; –1) et C(4 ; 0).

En exprimant le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes, calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 8 : Pour faire le point

Pour chacune des figures ci-dessous, calculer $\vec{u}.\vec{v}$ en choisissant l'expression du produit scalaire qui vous semble la mieux adaptée :

Figure 1

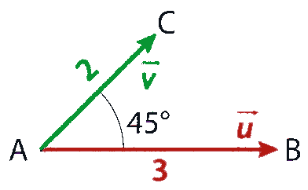


Figure 2

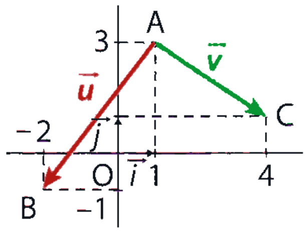
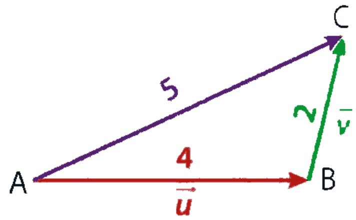


Figure 3



Remédiation

Exercice A :

Dans un repère orthonormé, on donne les points A(1 ; -3) et B(-3 ; 2). Calculer AB.

Exercice B :

Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice C :

ABC est un triangle isocèle en A tel que AB = 3 cm et BC = 4 cm. O est le milieu de [BC].

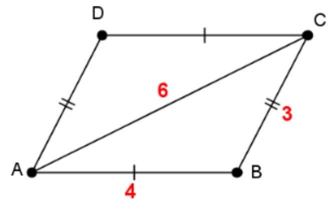
a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

b) I est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). Calculer la longueur BI.

Exercice D :

1) Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \dfrac{11}{2}$

2) Utiliser une autre expression de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ pour calculer BD.

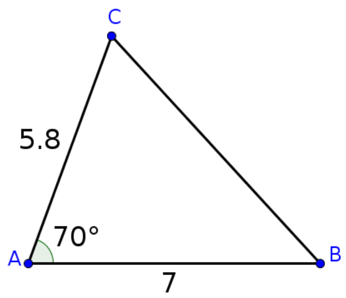


Exercice E :

A l'aide des informations ci-contre calculer :

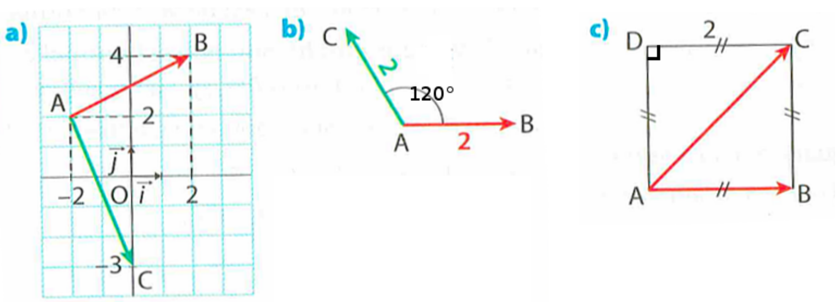
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ <u>Aide :</u> décomposer le vecteur $\overrightarrow{BC}$



Exercice F :

Dans chaque cas, utiliser l'expression du produit scalaire la plus adaptée pour calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



Exercice G :

ABCD est un rectangle tel tel que AB = 5 et AD = 2.

a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire la valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice H :

Soient A(0 ; 1), B(– 1 ; 2) et C(2 ; 3).

Montrer que ABC est un triangle rectangle.

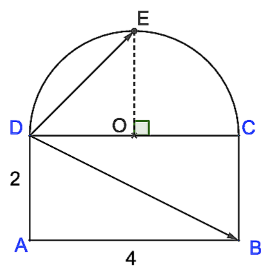
Exercice I :

ABCD est un rectangle. O est le milieu de [DC].

La perpendiculaire en O à [DC] coupe le demi-cercle de centre O en E.

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE}$.

.



Exercice 9 :

Calculer le produits scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ avec $\vec{u}=\begin{pmatrix}3-\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\ -4\end{pmatrix}$

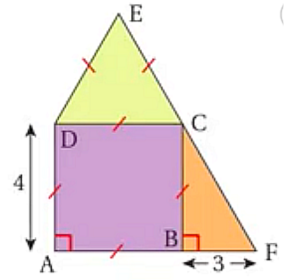
Exercice 10:

On considère la figure ci-contre.

Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{DE}$ b) $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{FC}.\overrightarrow{FA}$

d) $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{BF}$ e) $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{FC}$ f) $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{CB}$

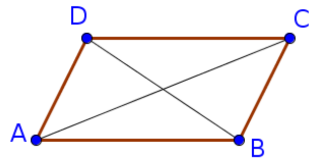


→ Correction vidéo :

Exercice 11 :

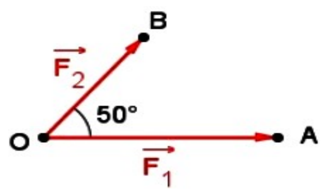
1) Montrer que $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2\times\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\right)$.

2) Soit ABCD un parallélogramme.
Appliquer l'égalité précédente avec $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$. Qu'obtient-on ?



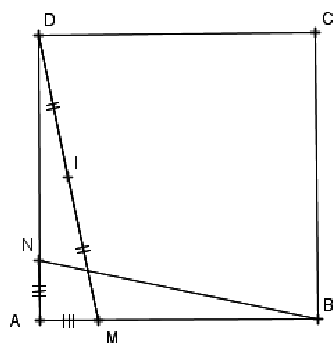
Exercice 12 : Intensité de la résultante

Soit un point O soumis à deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ qui forme un angle de 50°.
Les intensités des deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ sont respectivement 300 N et 200 N.
Par définition, la résultante des forces est le vecteur $\vec{R}=\vec{F_1}+\vec{F_2}$
Calculer l'intensité de la résultante, à un newton près.



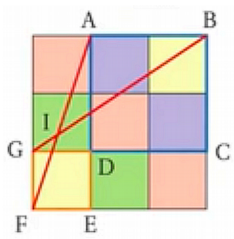
Exercice 13 :

ABCD est un carré de côté 1, M et N sont des points des segments [AB] et [AD] tels que : AM = AN.
Le point I est le milieu du segment [DM].
Démontrer que les droites (AI) et (BN) sont perpendiculaires.



Exercice 14 :

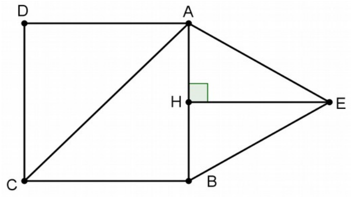
On considère le damier coloré ci-contre.
Montrer que les droites (AG) et (ID) sont orthogonales.



→ Correction vidéo :

Exercice 15 : *

ABCD est un carré de côté 4. Le triangle ABE est isocèle en E et EH = 3.



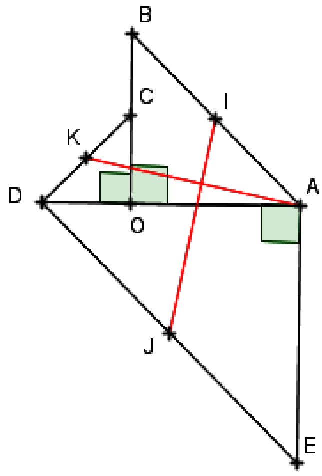
1) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}$.

2) Quelle longueur faut-il donner à HE pour que (AC) et (AE) soient perpendiculaires ?

Exercice 16 : *

Trois triangles rectangles isocèles,OAB, OCD et DAE sont disposés comme l'indique la figure ci-contre à droite, avec OA = a et OC = c.

Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [DE] et [DC].

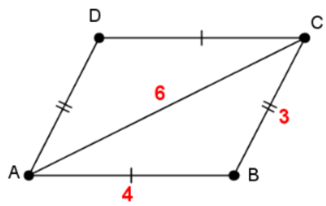


Démontrer que les droites (IJ) et (AK) sont perpendiculaires.
Préciser les différentes étapes de votre démarche.

Exercice 17 : *

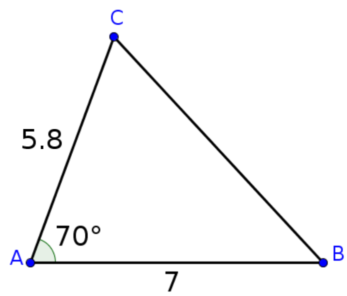
1) Calculer la mesure des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAC}$

2) Calculer la longueur de la diagonale [BD].



Exercice 18 : *

On souhaite calculer sur l'exemple ci-contre la longueur du troisième côté du triangle ABC.



1) a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

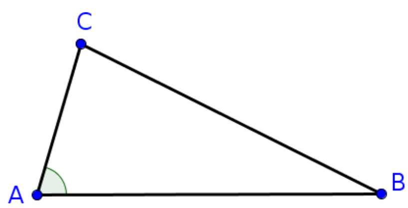
b) Donner une expression de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ qui fait intervenir la longueur BC.

c) En déduire la longueur BC.

2) On généralise :

a) En s'inspirant de l'exemple précédent, démontrer la formule de **Pythagore généralisée** ou **formule d'Al-Kachi** :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$



b) Écrire les deux autres formules.

Exercice 19 : *

Calculer l'aire de ABCD.