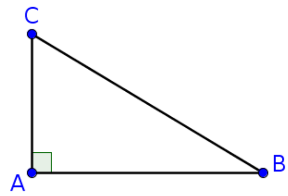
Produit Scalaire – Les cinq expressions sont équivalentes (une démonstration)

Objectif :
Nous allons montrer que les cinq expressions du produit scalaire sont équivalentes, en partant de la définition :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{BC}\|^2\right] \quad (*).$$

Introduction : **D'où peut venir cette définition de départ ?**

Tu sais que que le triangle ABC ci-contre est rectangle en A si et seulement si
$AB^2+AC^2=BC^2$ c'est à dire si et seulement si $AB^2+AC^2-BC^2=0$
ou encore si et seulement si $\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{BC}\|^2=0$



On peut donc se poser la question suivante :
« **Que devient l'expression $AB^2+AC^2-BC^2$ lorsque ABC n'est pas rectangle en A ?** »
Évidemment elle n'est pas nulle ! D'où la création de ce qu'on a appelé « **produit scalaire** » (*),
qui mesure ce qu'on peut appeler un « **défaut d'orthogonalité** ».

Partie A : On va montrer que $\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)=\begin{cases} AB\times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB\times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens opposés} \end{cases}$

Soit ABC un triangle quelconque. Notons H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB), c'est à dire le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

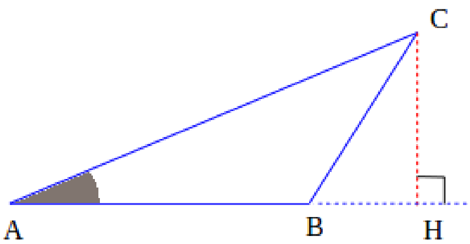


Figure 1 :
A, B et H alignés dans cet ordre
donc **AB = AH – BH**

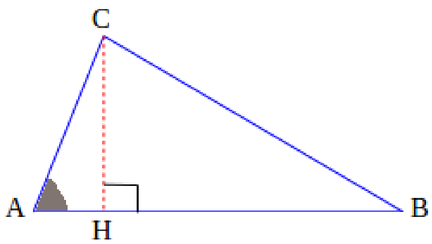


Figure 2 :
A, B et H alignés dans cet ordre
donc **AB = AH + BH**

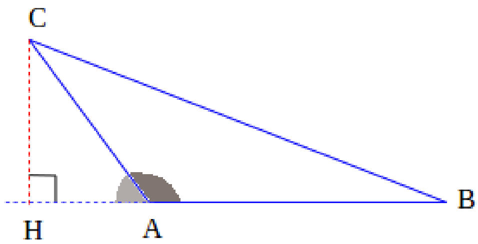


Figure 3 :
A, B et H alignés dans cet ordre
donc **AB = BH – AH**

Le triangle ACH est rectangle en H donc $\mathbf{AC^2=AH^2+CH^2}$
Le triangle BCH est rectangle en H donc $\mathbf{BC^2=CH^2+BH^2}$

1) ➢ Pour la figure 1, montrer alors, que $AB^2+AC^2-BC^2 = 2\times AH\times AB$
Outils à utiliser : développement d'un carré, réduction et factorisation
$AB^2+AC^2-BC^2$ =……………………………………………………………………………………………

………

………

………

………

………

………

➢ Pour la figure 2, les mêmes calculs conduisent aussi à $AB^2+AC^2-BC^2 = 2\times AH\times AB$ (Ne pas faire)

➢ Pour la figure 3, on montrerait de la même façon que $AB^2+AC^2-BC^2 = -2\times AH\times AB$ (à faire en BONUS)

Conclusion : on a bien obtenu $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{cases} \mathbf{AB\times AH} \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ \mathbf{-AB\times AH} \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens opposés} \end{cases}$

Partie B : On va montrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

➢ <u>Pour les figures 1 et 2</u> :

Le triangle ACH est rectangle en H, exprimer alors AH

en fonction de AC et de $\cos(\widehat{\text{BAC}})$.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

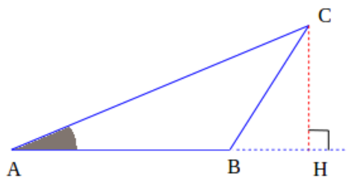


Figure 1

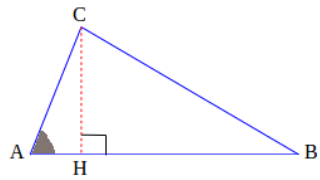


Figure 2

Utiliser ensuite l'égalité $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=\text{AB}\times\text{AH}$ de la partie A pour conclure.

……

……

➢ <u>Pour la figure 3 :</u>

$\text{AH}=\text{AC}\times\cos(\widehat{\text{CAH}})$ or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\ AB\times AH$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\ AB\times AC\times\cos(\widehat{\text{CAH}})$

On admet, pour l'instant, que $-\cos(\widehat{\text{CAH}})=\cos(\widehat{\text{BAC}})$ et donc on a encore

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{\text{BAC}})$

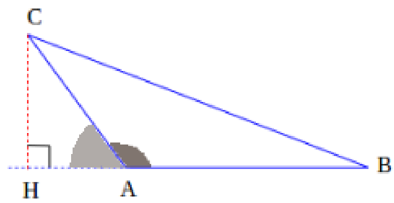
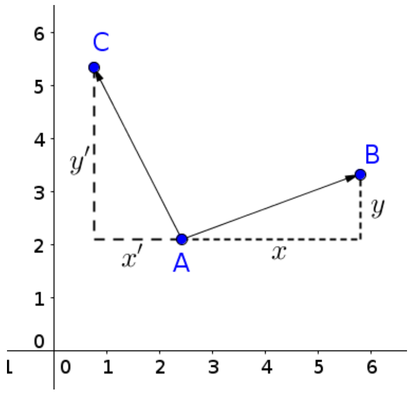


Figure 3

Conclusion : $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}}$ pour les trois figures et on a bien démontré le résultat annoncé.

Partie C : On va montrer que, dans un repère orthonormé, si $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=xx'+yy'$

$\overrightarrow{\text{BC}}=\overrightarrow{\text{BA}}+\overrightarrow{\text{AC}}$ donc $\overrightarrow{\text{BC}}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}\dots\dots\dots\\\dots\dots\dots\end{pmatrix}$ (fonction de x, x' , y et y')



Compléter :

AB^2 = …………………………… en fonction de x et de y

AC^2 = …………………………… en fonction de x' et de y'

BC^2 = ………………………………………………en fonction de x, x' , y et y'

En déduire l'expression de $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$ en fonction de x, x' , y et y'

……

……

……

……

……

Conclusion : on a bien démontré que $\boldsymbol{\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=xx'+yy'}$

Partie D : On va montrer que $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{AB}\|^2-\|\overrightarrow{AC}\|^2\right)}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{BC}\|^2\right]=\frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|^2\right]}$ Or $\|\overrightarrow{\text{AB}}-\overrightarrow{\text{AC}}\|^2=(\overrightarrow{\text{AB}}-\overrightarrow{\text{AC}})^2$ *(à développer)*

donc $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=$ ……………………………………………………………………………………………………

……

……

Conclusion : on a bien démontré que $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{AB}\|^2-\|\overrightarrow{AC}\|^2\right)}$