Produit Scalaire – Cours

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
On appelle **norme** de $\vec{u}$ le réel positif ou nul, noté $\|\vec{u}\|$, défini par $\|\vec{u}\| = AB$.

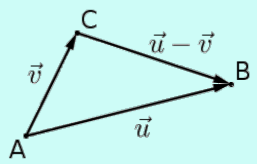
***Exemple* :** Soient A(–1 ; 2) et B(3 ; –1) dans un repère orthonormé. Déterminer $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Propriété :
Pour tout réel λ et tout vecteur $\vec{u}$ on a $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$.

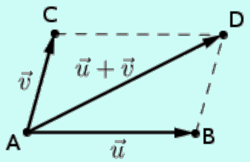
Propriété : Dans un repère orthonormé, la norme d'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est :

▪ Soient trois points A, B et C et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, leur **produit scalaire** est le nombre réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, défini par :

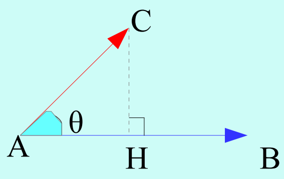
Définition : **avec des normes seulement (1)**

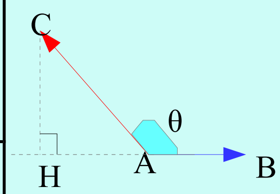


Propriété : **avec des normes seulement (2)**



Propriété : **avec le projeté orthogonal**
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).



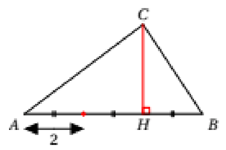


Propriété : **avec les coordonnées**
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé .

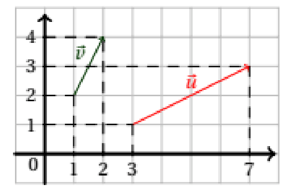
Propriété : **(avec un angle)**

Exemple : Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ou $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chacun des cas suivants:

cas 1

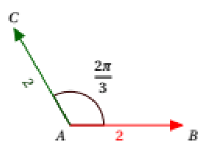


cas 2

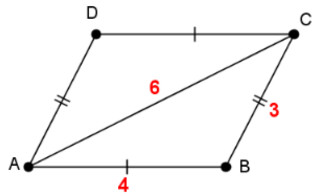


Le repère est orthonormé

cas 3



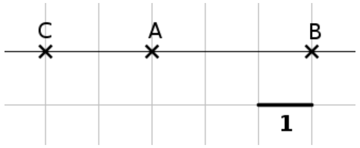
cas 4



Remarque : On pouvait aussi choisir l'une des trois propriétés comme définition initiale.
Dans ce cas, les autres formules deviennent des propriétés de cette nouvelle définition. Les quatre expressions sont donc en fait équivalentes.

Cas particulier : $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$ noté aussi $\vec{u}^2$

<u>Situation particulière souvent rencontrée :</u> si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u}.\vec{v}=\begin{cases} \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens} \\ -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens contraires} \end{cases}$

Exemple : 

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel k, on a :

- symétrie : $\vec{v}\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{v}$
- bilinéarité : $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$

  $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

- Identités remarquables : $(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$

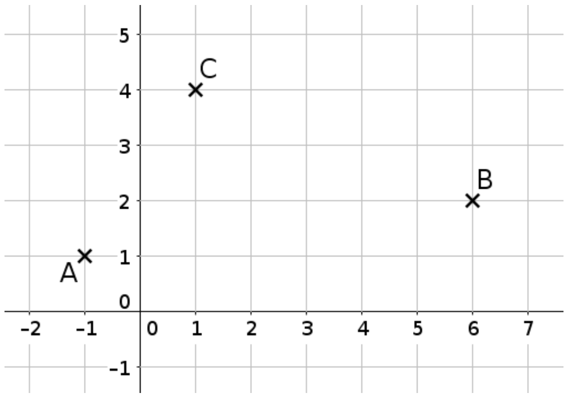
  $(\vec{u}-\vec{v})^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$

  $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2-\vec{v}^2$

Définition : Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **orthogonaux** si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Remarque : Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

Propriété :
Deux vecteurs sont **orthogonaux** si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.



Exemple : Les droites (CA) et (CB) ci-dessous sont-elles perpendiculaires ?

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

On appelle **norme** de $\vec{u}$ le réel positif ou nul, noté $\|\vec{u}\|$, défini par $\|\vec{u}\| = AB$.

Propriété :

Pour tout réel λ et tout vecteur $\vec{u}$ on a $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$.

Propriété : Dans un repère orthonormé, la norme d'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Exemple **:** Soient A(– 1 ; 2) et B(3 ; – 1) dans un repère orthonormé. Déterminer $\|\overrightarrow{AB}\|$.

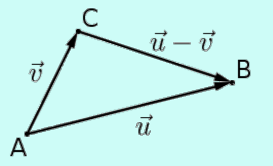
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-(-1) \\ -1-2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

▪ Soient trois points A, B et C et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, leur **produit scalaire** est le nombre réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, défini par :

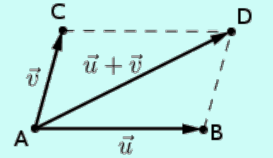
Définition **avec des normes seulement (1)**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right]$$



Propriété **avec des normes seulement (2)**

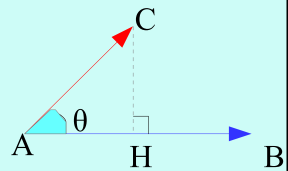
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$$



Propriété **avec le projeté orthogonal**

Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \begin{cases} AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens opposés} \end{cases}$$



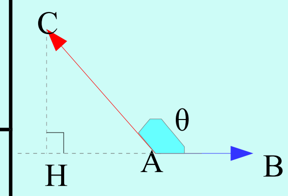
Propriété **avec les coordonnées**

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé .

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

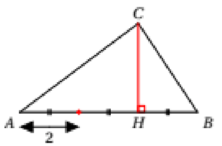
Propriété **avec un angle**

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} \,;\, \vec{v}) = AB \times AC \times \cos\theta$

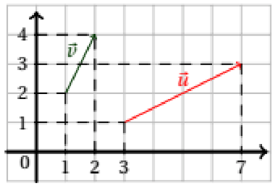


Exemple : Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ou $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chacun des cas suivants:

cas 1

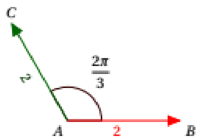


cas 2

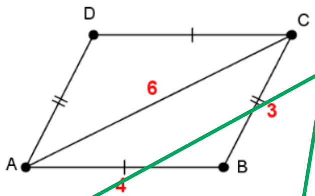


Le repère est orthonormé

cas 3



cas 4



cas 1 : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH = 6 \times 4 = 24$

cas 2 : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 1 + 2 \times 2 = 8$

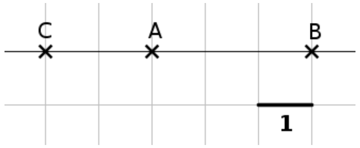
cas 3 : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} = 2 \times 2 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2$

cas 4 : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|^2\right] = \frac{1}{2}\left[AB^2 + AC^2 - CB^2\right] = \frac{43}{2}$

Remarque : On pouvait aussi choisir l'une des trois propriétés comme définition initiale. Dans ce cas, les autres formules deviennent des propriétés de cette nouvelle définition. Les quatre expressions sont donc en fait équivalentes.

Cas particulier : $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$ noté aussi $\vec{u}^2$

<u>Situation particulière souvent rencontrée :</u> si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u}.\vec{v}=\begin{cases} \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens} \\ -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens contraires} \end{cases}$

Exemple : 

On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\|\overrightarrow{AB}\|^2=9$ que l'on peut noter aussi $\overrightarrow{AB}^2=AB^2=9$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|=-3\times2=-6$

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel k, on a :

- symétrie : $\vec{v}\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{v}$
- linéarité : $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$

  $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

- Identités remarquables : $(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$

  $(\vec{u}-\vec{v})^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$

  $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2-\vec{v}^2$

Une démonstration :

$(\vec{u}-\vec{v})^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}^2 = \vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$

Définition : Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **orthogonaux** si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Remarque : Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

Exemple 2 : Les droites (CA) et (CB) ci-dessous sont-elles perpendiculaires ?

On a $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

Ainsi, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=1\times4+(-2)\times2=0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ étant orthogonaux, les droites (CA) et (CB) sont perpendiculaires.

Propriété :
Deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.