Première

Produit scalaire – Phase 5
CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1 :

$$W = \vec{AB}\cdot\vec{F} = \mathrm{AB}\times\|\vec{\mathrm{F}}\|\times\cos(45^\circ) = 10\times100\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 500\sqrt{2}\approx 707\,J$$

Exercice 2 :

1) a) $\vec{u}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'=-3\times(-1)+4\times5=23.$

b) $\vec{u}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{10}\\-\frac{9}{5}\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'=\frac{2}{3}\times(-\frac{1}{10})+12\times(-\frac{9}{5})=-\frac{1}{15}-\frac{108}{5}=\frac{-325}{15}=\frac{-65}{3}$

2) a) $\|\vec{v}\|=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{26}$ $\qquad$ b) $\|\vec{v}\|=\sqrt{(\frac{-1}{10})^2+(\frac{-9}{5})^2}=\sqrt{\frac{1}{100}+\frac{81}{25}}=\sqrt{\frac{325}{100}}=\frac{\sqrt{325}}{10}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

Exercice 3 :

1) AB = 3, AC = 8 et $\widehat{\mathrm{BAC}}$ = 30°. $\vec{\mathrm{AB}}.\vec{\mathrm{AC}}=\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\cos\widehat{\mathrm{BAC}}=3\times8\times\cos 30=24\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}.$

2) AB = 2 et $\widehat{\mathrm{ABC}}=\widehat{\mathrm{ACB}}=45^\circ$ Ainsi : le triangle ABC est rectangle isocèle en A donc AB = AC = 2 et $\widehat{\mathrm{BAC}}=90^\circ$

$\vec{\mathrm{AB}}.\vec{\mathrm{AC}}=\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\cos\widehat{\mathrm{BAC}}=2\times2\times\cos(90^\circ)=2\times2\times0=0.$

Exercice 4 :

1) Correction vidéo :

2) Correction vidéo :

Exercice 5 :

Correction vidéo :

Exercice 6 :

1) $\vec{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{\mathrm{CD}}\begin{pmatrix}x_D-x_C\\y_D-y_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}.$ $\qquad \vec{\mathrm{AB}}.\vec{\mathrm{CD}}=xx'+yy'=2\times(-3)+3\times(-2)=0.$

2) Les vecteurs $\vec{\mathrm{AB}}$ et $\vec{\mathrm{CD}}$ sont orthogonaux donc les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 7 :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C-x_A \\ y_C-y_A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=xx'+yy'=-1\times4+(-3)\times(-2)=2$.

Or : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$. Or : $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$ et $AC=\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}$.

Ainsi : $\sqrt{10}\times\sqrt{20}\times\cos(\widehat{BAC})=2\Leftrightarrow\cos(\widehat{BAC})=\frac{2}{\sqrt{200}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

Ainsi : $\widehat{BAC}=\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)\approx81{,}87°$.

Exercice 8 :

Figure 1 : $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=3\times2\times\cos45=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$.

Figure 2 : $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=xx'+yy'=-3\times3+(-4)\times(-2)=-1$.

Figure 3 : $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right]$, donc :$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\|^2-\|\overrightarrow{AB}\|^2-\|\overrightarrow{BC}\|^2\right]$

donc $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{AB}\|^2-\|\overrightarrow{BC}\|^2\right]=\frac{1}{2}\left[AC^2-AB^2-BC^2\right]=\frac{1}{2}\left[5^2-4^2-2^2\right]=2{,}5$.

CORRECTION REMÉDIATION

Exercice A :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-1=-4\\2-(-3)=5\end{pmatrix}$

$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-4)^2+5^2}=\sqrt{41}$

Exercice B :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix},\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'=2\times(-1)+(-3)\times 2=-8.$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix},\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'=(-3)\times(-1)+(-3)\times 2=-3.$

Exercice C :

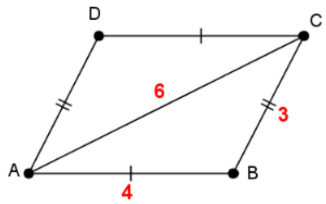
ABC est un triangle isocèle en A tel que AB = 3 cm et BC = 4 cm. O est le milieu de [BC].

a) O est le projeté orthogonal de A sur (BC) donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BO}=4\times 2=8$

b) I est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BI}=3\times BI$

On en déduit que $3\times \mathrm{BI}=8$ donc $\mathrm{BI}=\frac{8}{3}$

Exercice D :

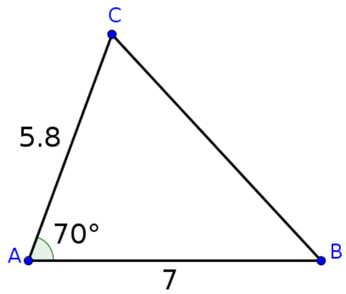


1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\|^2-\|\overrightarrow{AB}\|^2-\|\overrightarrow{AD}\|^2\right]=\frac{1}{2}\left[AC^2-AB^2-AD^2\right]=\frac{1}{2}\left[6^2-4^2-3^2\right]=\frac{11}{2}.$

2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AD}\|^2-\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\|^2\right]=\frac{1}{2}\left[AB^2+AD^2-BD^2\right]=\frac{1}{2}\left[4^2+3^2-BD^2\right]$

On en déduit que $\frac{1}{2}(16+9-\mathrm{BD}^2)=\frac{11}{2}$ donc $\mathrm{BD}^2=14$ donc $\mathrm{BD}=\sqrt{14}$

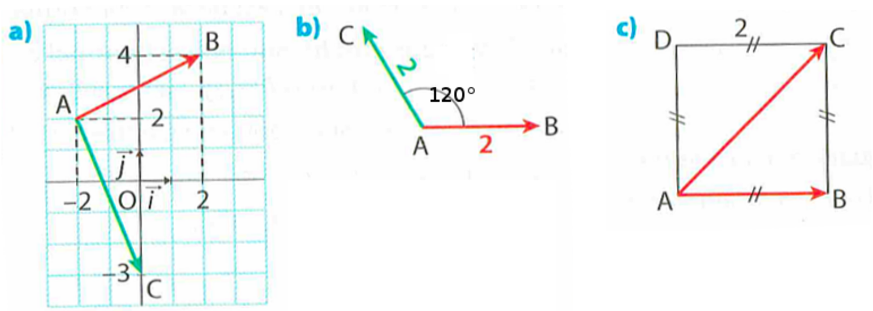
Exercice E :



a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(BAC)=7\times 5{,}8\times\cos(70^\circ)\approx 13{,}9$

b) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BA}=BA^2+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}=49-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=49-40{,}6\cos(70°)\approx 35{,}12$

Exercice F :



a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix},\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times 2+2\times(-5)=-2$

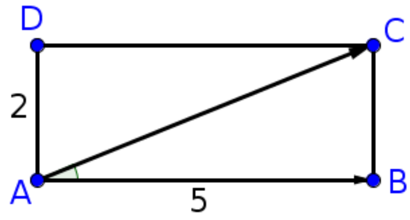
b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(BAC)=2\times 2\times\cos(120^\circ)=-2$

c) B est le projeté orthogonal de C sur (AB) donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2=4$

Exercice G :

a) B est le projeté orthogonal de C sur (AB) donc

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=AB^2=25$



b) D'après la propriété de Pythagore : $AC=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})=5\sqrt{29}\times\cos(\widehat{BAC})$

donc $\cos(\widehat{BAC})=\dfrac{25}{5\sqrt{29}}=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$ $\quad\widehat{BAC}\approx 21{,}8^\circ$

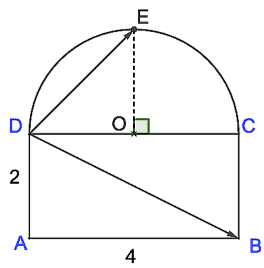
Exercice H :

Soients $A(0;1)$; $B(-1;2)$; $C(2;3)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1\times2+1\times2=0$ donc ABC est un triangle rectangle en A

Exercice I :

$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DE}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OE})=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OE}=0+2\times(-2)+4\times2+0=4$

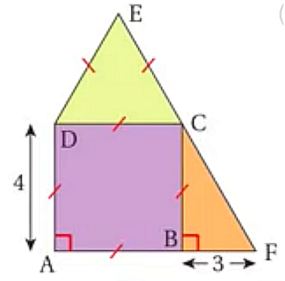


Correction des exercices à réaliser après l'auto-évaluation

Exercice 9 :

$\vec{u}=\begin{pmatrix}3-\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\ -4\end{pmatrix}$ $\quad\vec{u}\cdot\vec{v}=(3-\sqrt{2})\times(\sqrt{2}-1)+\sqrt{2}\times(-4)=3\sqrt{2}-3-2+\sqrt{2}-4\sqrt{2}=-5$

Exercice 10:



→ Correction vidéo :

Exercice 11 :

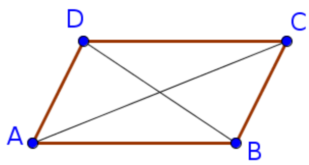
1) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=(\vec{u}+\vec{v})^2+(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2+(\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2)=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2+\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2\vec{u}^2+2\vec{v}^2=2\|\vec{u}\|^2+2\|\vec{v}\|^2=2\times\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\right).$

2) Avec $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}-\vec{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}$.

On obtient alors $AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2)$

Conclusion : Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale au double de la somme des carrés de deux côtés consécutifs.

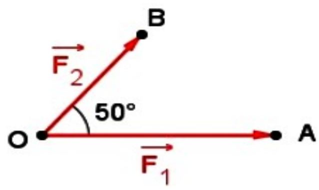


Exercice 12 : Intensité de la résultante

$\|\vec{F_1}+\vec{F_2}\|^2=\|\vec{F_1}\|^2+\|\vec{F_2}\|^2+2\|\vec{F_1}\|\times\|\vec{F_2}\|\times\cos(\widehat{AOB})$

$\|\vec{F_1}+\vec{F_2}\|^2=300^2+200^2+2\times300\times200\times\cos(50°)\approx207134{,}5$

$\|\vec{R}\|\approx455\,N$

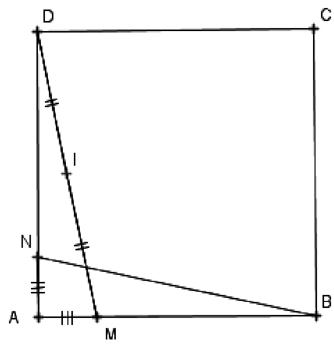


Exercice 13 :

Méthode en utilisant les coordonnées dans le repère orthonormé $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$

A(0 ; 0) ; B(1 ; 0) ; C(1 ; 1) ; D(0 ; 1) ; M(x ; 0) et N(0 ; x) avec $0\leqslant x\leqslant1$

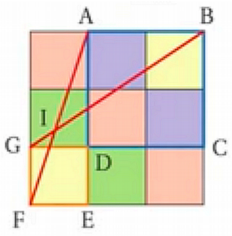
I étant le milieu de [DM], alors $x_I=\dfrac{x_D+x_M}{2}=\dfrac{0+x}{2}=\dfrac{x}{2}$ **et** $y_I=\dfrac{y_D+y_M}{2}=\dfrac{1+0}{2}=\dfrac{1}{2}$.



$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}x_I-x_A\\ y_I-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{x}{2}\\ \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix}x_N-x_B\\ y_N-y_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ x\end{pmatrix}$. Ainsi : $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BN}=\dfrac{x}{2}\times(-1)+\dfrac{1}{2}\times x=\dfrac{-x}{2}+\dfrac{x}{2}=0.$

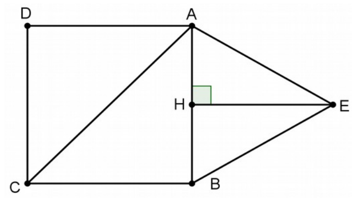
Donc les droites (AI) et (BN) sont orthogonales.

Exercice 14 :



→ Correction vidéo :

Exercice 15 :



1) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HE})=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{HE}$.

Or : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HE}=0$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HE}$ sont orthogonaux.

De même $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH}=0$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=AB\times AH=4\times 2=8$ (car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HE}$ sont colinéaires de même sens).

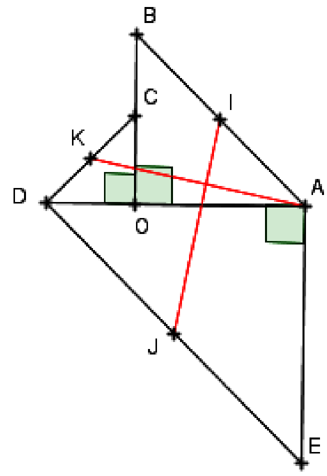
$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{HE}=-BC\times HE=-4\times 3=-12$.

D'où : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}=8+0+0-12=-4$.

2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=8-4\times HE$ d'après le calcul précédent.

Avec HE=2, nous avons $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}=0$ et (AC) et (AE) sont alors perpendiculaires

Exercice 16 :



On introduit un repère orthonormé d'origine O dans lequel :

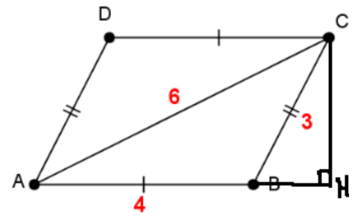
$A(a;0)$ $B(0;a)$ $C(0;c)$ $D(-c;0)$ $E(a;-a-c)$

$I\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$ $K\left(-\frac{c}{2};\frac{c}{2}\right)$ J milieu de [DE] a pour coordonnées $J\left(\frac{-c+a}{2};\frac{-a-c}{2}\right)$

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-\frac{c}{2}\\ \frac{-2a-c}{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}-\frac{c}{2}-a\\ \frac{c}{2}\end{pmatrix}$

Le produit scalaire $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AK}$ est égal à $-\frac{c}{2}\times\left(-\frac{c}{2}-a\right)+\frac{-2a-c}{2}\times\frac{c}{2}=0$

Exercice 17 :



1) * $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(BA^2+BC^2-AC^2)=\frac{1}{2}(4^2+3^2-6^2)=\frac{-11}{2}$

mais aussi $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=BA\times BC\times\cos(\widehat{ABC})=12\cos(\widehat{ABC})$

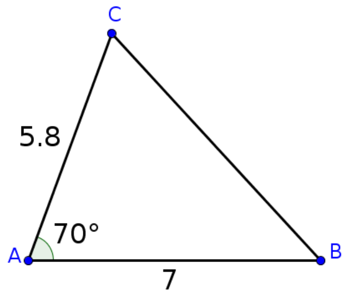
donc $12\cos(\widehat{ABC})=-\frac{11}{2}$ $\cos(\widehat{ABC})=-\frac{11}{24}$ donc $\widehat{ABC}\approx 117^\circ$

* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)=\frac{1}{2}(4^2+6^2-3^2)=\frac{43}{2}$ mais aussi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})=24\cos(\widehat{BAC})$

donc $24\cos(\widehat{BAC})=\frac{43}{2}$ $\cos(\widehat{BAC})=\frac{43}{48}$ donc $\widehat{BAC}\approx 26{,}4^\circ$

2) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(BD^2-BA^2-BC^2)=\frac{1}{2}(BD^2-4^2-3^2)=\frac{BD^2-25}{2}$ donc $\frac{BD^2-25}{2}=-\frac{11}{2}$ $BD^2=14$ $BD=\sqrt{14}$ $BD\approx 3{,}74$

Exercice 18 :

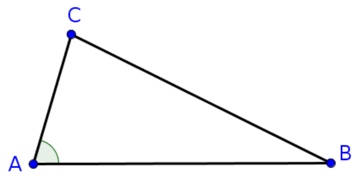


1) a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})=7\times 5{,}8\times\cos(70^\circ)\approx 13{,}9$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)=\frac{1}{2}(7^2+5{,}8^2-BC^2)$

c) Donc $\frac{1}{2}(49+33{,}64-BC^2)=40{,}6\cos(70^\circ)$

$BC^2=49+33{,}64-2\times 40{,}6\cos(70^\circ)\approx 54{,}87$ donc $BC\approx 7{,}41$



2) On généralise :

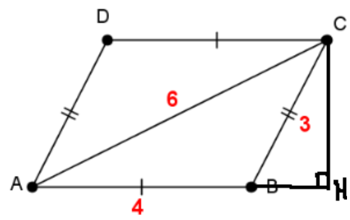
a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$

Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)$ donc $\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$

$AB^2+AC^2-BC^2=2\times AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$ et donc $BC^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$

b) Autres formules : $AC^2=AB^2+BC^2-2\times AB\times BC\times\cos(\widehat{ABC})$ $AB^2=AC^2+BC^2-2\times AC\times BC\times\cos(\widehat{ACB})$

Exercice 19 :



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)=\frac{1}{2}(4^2+6^2-3^2)=\frac{43}{2}$

Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=AB\times AH$ avec H le projeté orthogonal de C sur (AB)

Donc $AB\times AH=\frac{43}{2}$ $4\times AH=\frac{43}{2}$ $AH=\frac{43}{8}$

Le triangle CBH est rectangle en H donc $CH^2=BC^2-HB^2$

$CH^2=3^2-\left(\frac{43}{8}-4\right)^2=9-\left(\frac{11}{8}\right)^2=\frac{455}{64}$ donc $CH=\frac{\sqrt{455}}{8}$

L'aire du parallélogramme est alors égale à $AB\times CH=4\times\frac{\sqrt{455}}{8}=\frac{\sqrt{455}}{2}$