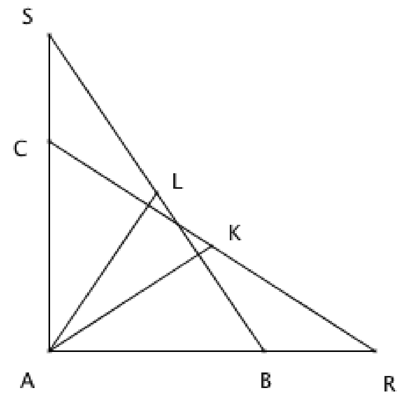
Première

Produit scalaire – Phase 5
Correction des problèmes du DM

Problème 1 : **

1) ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB=AC=a$
On pose $AR=AS=b$ a et b sont deux réels non nuls.



$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AC})$ et $\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AS}$

donc

$$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BS}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AS})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AS})=\frac{1}{2}(-ab+ab)=0$$

La droite (AK) est la hauteur du triangle ABS issue du sommet A

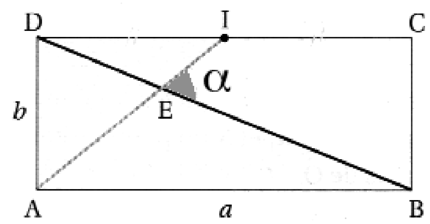
2) $\overrightarrow{AL}\cdot\overrightarrow{CR}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AS})\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AR})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AR})=\frac{1}{2}(0+ab-ab+0)=0$

Donc (AL) et (CR) sont perpendiculaires . (AL) est la hauteur du triangle ABS issue de A.

Problème 2 : *

ABCD est un rectangle avec AB = a et AD = b (a>0 et b>0)

I est le milieu de [CD].



1) $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{DB}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DI}).(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{AB})$

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{DB}=-b^2+0+0+\frac{a^2}{2}=-b^2+\frac{a^2}{2}=\frac{a^2-2b^2}{2}$$

2) $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{DB}=AI\times DB\times\cos(\alpha)=\sqrt{b^2+\frac{a^2}{2}}\times\sqrt{b^2+a^2}\times\cos(\alpha)$ donc $\cos(\alpha)=\dfrac{a^2-2b^2}{2\sqrt{b^2+\frac{a^2}{2}}\times\sqrt{a^2+b^2}}$

3) Dans le cas particulier où a = 2 et b = 1, on a $\cos(\alpha)=\dfrac{2}{2\sqrt{3}\times\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{15}}$ donc $\alpha\approx 75^\circ$

4) Pour que $\widehat{IEB}$ soit un angle droit, il faut donc que $\cos(\alpha)$ soit égal à 0 et donc que $a^2-2b^2=0$

donc il faut que a soit égal à $\sqrt{2}\times b$. Le rectangle ABCD a alors le format d'une feuille A4.